まえがき

数理論理学は 20 世紀初頭に誕生し，20 世紀のなかばからさらに大きく発展してきた．概念構成や枠組みなどの数理論理学の方法論とそれにより得られた成果は，関連する諸分野にも大きな影響をあたえてきた．本書は，このような数理論理学の成果のうちで現代的な観点からもっとも基本的で重要と思われるテーマを選んで解説した数理論理学への入門書である．その解説にあたっては，伝統的なスタイルにとらわれることなく，現代的な意義に重点をおいて新たな視点からの展開を試みた．

たとえば本書では数理論理学の基本的な結果であるゲンツェンの基本定理とゲーデルの完全性定理をとりあげている．この 2 つは 1930 年代に得られた古典的な結果であるが，本書でのゲンツェンの定理の証明は，証明図とラムダ項の間のカリー・ハワードの対応を使っている．カリー・ハワードの対応の重要性が日本の論理学や理論計算機科学の専門家の間で認識されるようになったのは 1980 年代のなかばになってからであろう．このように本書では内容の選び方や証明の記述のしかたについていろいろな工夫をおこなった．そのような理由で書名を『現代数理論理学序説』としたのである．初学者にとっての入門書としてだけでなく，すでに数理論理学についての知識をもっている読者にとっても面白い本であってほしいと願っている．

本書の 1 章，2 章，3 章は古森が担当し，4 章は小野が担当している．おおざっぱにいえば，3 章までは構文論や証明論に重点がおかれ，4 章では意味論に重点がおかれているといっていいだろう．本書の原形はほぼ 17 年前に完成していた．その内容は，1 章が「命題論理」，2 章が「述語論理」，3 章が「いろいろな論理」というものであった．それを講義などで使いながら徐々に改訂を繰り返して本書ができあがった．

1 章は命題論理, 2 章は述語論理というように，命題論理と述語論理を別けた構成にした．このような構成を採用するとほぼ同じ議論を繰り返すことになる．とくに述語論理の構文論の議論は命題論理の場合と同じように展開されることになる．しかし，このような繰り返しは初学者にとっては理解の助けになるものと思う．最初に聞いたときには分からなくても，2 度目に聞いたときは理解できるということはよくあることである．

ゲンツェン自身があたえた基本定理の証明は，場合分けの数が非常に多くなってしまう．論理記号の数を減らすことにより，場合分けの数を減らすこともできるが，それでもまだ多くの場合分けが必要である．初学者にとってはそのような煩わしさによって証明の本質を見失ってしまいかねない．ゲンツェンがおこなった証明を述べた邦書もすでにいくつかあるの

で，本書ではそれとは違って，自然演繹の正規化定理とグリベンコの定理を経由することによって古典論理の基本定理の証明をあたえている．証明の詳細は本文を見てほしいが，このような証明が書かれている類書はないと思っている．

17 年前の草稿から 2005 年 4 月までは，1 章と 2 章の内容に細かな改訂が施されただけであったが，2005 年 4 月の改訂で大幅に書き直すとともに，3 章「ラムダ計算の世界」を新たにつけ加えた．ラムダ項についてはすでに 1 章で導入し，カリー・ハワードの対応の考え方を取り入れることにより，自然演繹とラムダ項の型付けの体系が同一視できることを示している．ただ，ラムダ計算自体がどのようなものであるかについても述べておく必要を感じ，この章をつけ加えることにした．また，この章で紹介する極小の概念は正規な証明図の唯一性と密接な関係にある新しいものである．

4 章では基本的な非標準論理である直観主義論理や様相論理，著者たちが深く研究に関わってきた中間論理や部分構造論理など，さまざまな体系を紹介している．とくに，この 10 年ほど急速に研究が進展している「論理学への代数的アプローチ」に力点をおき，普遍代数や代数的論理学の基礎的な概念や結果を述べた．

本書の 1 章，2 章，3 章の内容を読むにあたって，数理論理学や数学の予備知識はとくに仮定していない．本書では，ある種の数学的帰納法がよく使われているが，数理論理学を初めて学ぶ読者はそのような帰納法に慣れていないであろう．本書の問題などを自力で解くことによりその帰納法を身につけて欲しい．また，最初に数理論理学やラムダ計算を学ぶときに必ず学んでほしい内容と読み飛ばしていい内容とが混在しているところもある．教育的配慮という点では問題かもしれないが，関連する話題のところでは筆の流れのままにやや高度な内容にも触れて読者の興味を喚起したいということでこのようなスタイルを採用した．したがって初めて数理論理学やラムダ計算を学ぶ人は，やや難しく思われる部分は軽く読み流すのがよい．どの部分がそのような部分かは具体的には述べないが，初学者は基本的な問題 ($*$ 印がついている) を解くために必要な部分をじっくり読んでほしい．なお，一部の問題の解答は以下の WEB ページに掲載する予定である (http://homepage2.nifty.com/kame-shobo/)．初めから解答を見てしまうのは論外だが，しばらく考えて分からなければ，解答を見て同じような次の問題に取り掛かるのがよいだろう．

本書が出版に至るまで想像以上の年月がかかってしまった．その間，私たちの周辺にいたさまざまな人たちから草稿についてのコメントや助言をいただいた．ようやく完成に至るにあたり亀書房の亀井哲治郎氏に負うところが大きい．これらの方々に心から感謝したい．

2010 年 4 月下旬

古森雄一
小野寛晰

目　次

第1章　命題論理

1.1. 論理学と形式的体系

1.1.1　形式化とは？

論理学は非常に古くからある学問です．ギリシャ時代の哲学者アリストテレスによって完成されてしまったと考えられていました．そのために，ギリシャ時代から 19 世紀後半までほとんど進歩がありませんでした．19 世紀後半からは集合論の公理化と並行して，論理学も著しい進歩を遂げ，1930 年のゲーデルの完全性定理に到達しました．その進歩の中で克服しなければならなかったそれまでの考え方の 1 つが，意味と形式の混在でした．

文「二等辺三角形の底角は等しい」は意味のある文です．この文はその意味とは無関係に 13 文字からなるという形式をもっています．この程度の意味と形式の分離ならば容易にできますが，証明を意味を考えずに形式だけで行うのはむずかしいことだったようです．証明の一部を意味を考えずに形式的に行うことは，論理学を知らなくてもよくあることです．たとえば，証明の途中に出てくる 10 進法による計算などは意味など考えずに形式的にしています．一部を形式的に行い一部を意味を考えて行うということが，事態をかえってむずかしくしています．

論理学の発展の途中でもそのようなことが起きています．ゲーデルの完全性定理とほぼ同値の定理を 1920 年にスコーレムが示していますが，完全性定理には到達しませんでした．それはまだ構文論と意味論 (この 2 つの言葉の説明はすぐ後に出てきます) の分離が完全にはできていなかったためと考えられます．構文論と意味論の分離ができていれば，最初に気になるのは健全性定理と完全性定理とが成り立っているだろうか，ということです．ですから，2 つの分離ができていれば，ほぼ同値の定理を証明したのに完全性定理を証明しないというのは考えづらいことなのです．

数学はその歴史の中で，さまざまな人類共通の記号法を創り出してきました．その最たるものが 10 進法による数の表示とそれを使った計算法です．また，変数を使った方程式の表現法，空間の位置の座標による表現，微積分に使われる導関数の記法や積分記号などがなかったら，数学の発展だけでなく現代の科学技術の存在もおぼつかなかったでしょう．これらの記号法は意味内容を正確かつ簡潔に表現するだけでなく，定理の証明や新しい事実の発見にも役立ったのです．この記号化の方向を極端に進めたのが形式化です．しかし，記号化と形式化には決定的な違いがあります．記号化された定理を記号化された公理から記号に対する

規則だけで導くことを目論んだのが形式化です．すなわち，証明を意味内容を考えずに機械的に行おうというわけです．形式化が進められたのは，コンピュータがまだ存在しない前世紀の初め頃のことでした．それが行われたのは，証明を機械にやらせるという夢の実現を目指すということもあったのですが，もっと差し迫った必要があったからです．

カントールが 19 世紀の終り頃に集合論を創りました．デデキントやフレーゲは，集合論を使うと数学で使われるほとんどあらゆる概念を生み出すことができることを示しました．ところが，彼らがそのような努力をしている最中に集合論の中に矛盾が発見されてしまったのです．そのパラドックスを克服するためにいくつかの考え方が現れたのですが，それらのうちある意味で完全に成功したのが集合論を形式化するというものです．形式化された集合論を公理的集合論といいます．

公理的集合論では，まず日本語などの自然言語で書かれていた集合論の命題を人工言語で表現します．人工言語で表現した命題のいくつか (無限個でもいい) を矛盾しないように選んで公理とします．また，公理から定理を導くための推論規則を決めてやります．その後はその規則を使って，意味内容を考えず機械的に次々と (形式化された命題である) 定理を証明すればいいのです．なぜ形式化が必要だったのかは，自然言語のもつ曖昧さを排除するためだけでなく，無限個の公理をきちんと述べるためでもありました．実際，ツェルメロ–フレンケルの公理的集合論は無限個の公理をもった体系です．また形式化によりそれらが数学的に取り扱いやすいものになりました．公理的集合論には現在のところ矛盾は現れていません．

公理的集合論の推論規則は集合論に特有のものではなく，すべての数学の理論に共通のものです．公理的集合論の公理には集合論に特有のものとすべての理論に共通のものとがあります．そのすべての理論に共通の推論規則と公理を集めてできた体系が，2 章で学ぶ述語論理の体系です．述語論理の体系の重要な一部分を取り出してできたのが，本章で学ぶ命題論理の体系です．

このように**形式的体系 (formal system)** はもともと意味内容のあるものを形式化してできたものなのですが，この方法が確立すると，先に形式的体系があって後からその意味を考える，というような例も出てきました．そのような例の 1 つが次に述べる体系 CLw です．私たちは意味内容を考えずに何かを取り扱うことに慣れていません．どうしても，それぞれの記号で表されるものはどのような意味なのだろうか，などと考えてしまいます．形式的体系の性質を，意味内容を考えずに単なる記号列の関係として調べる方法を**構文論的 (syntactical)** な方法といいます．また，意味内容について全く触れずに述べることのできる形式的体系の性質を構文論的な性質といいます．構文論的な方法に慣れるまでは，意味内容がよく分からない体系を扱うほうがよいと考え，組み合わせ論理の体系 CLw を最初に扱う形式的体系としました．

本書の 1 章と 2 章では，論理の体系を主として構文論的な方法で取り扱っています．そして，論理の最も美しい定理といわれているゲンツェンの基本定理を目標としました．ゲンツェンの基本定理は論理の構文論的な性質を述べた定理です．

形式的体系は構文論的な取扱いだけをしていればいいかというと，そういうわけにはいきません．ある意味内容のある理論を形式化して作られた形式的体系の場合，その形式的体系

参考文献

[1] H. Barendregt. *The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics*, Vol. 103 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland, revised edition, 1984.

[2] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. *Modal Logic,* Vol. 53 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science.* Cambridge University Press, 2001.

[3] S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra.* Springer, 1981. available online.

[4] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano and D. Mundici. *Algebraic Foundations of Many-valued Reasonings,* Vol. 7 of *Trends in Logic.* Kluwer Academic Pub., 2000.

[5] B. A. Davey and H. A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order.* Cambridge University Press, 2nd edition, 2002.

[6] R. Fagin, J. Y. Halpern, Y. Moses and M. Y. Vardi. *Reasoning about Knowledge.* MIT Press, 1995.

[7] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono. *Residuated Lattices : An Algebraic Glimpse at Substructural Logics,* Vol. 151 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* Elsevier, 2007.

[8] R. Goldblatt. *Logic of Time and Computation,* Vol. 7 of *CSLI Lecture Notes.* CSLI, 2nd edition 1992.

[9] R. L. Goodstein. 数学基礎論入門. 培風館，1979. 赤攝也 訳.

[10] 萩谷昌己，西崎真也．論理と計算のしくみ．岩波書店，2007.

[11] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic,* Vol. 4 of *Trends in Logic.* Kluwer Academic Pub., 1998.

[12] J. R. Hindley. *Basic Simple Type Theory,* Vol. 42 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science.* Cambridge University Press, 1997.

[13] J. R. Hindley and J. P. Seldin. *Lambda–calculus and Combinators, an Introduction.* Cambridge University Press, 2008.

[14] 小野寛晰．情報科学における論理．日本評論社，1994.

[15] 小野寛晰．情報代数．共立出版株式会社，1994.

[16] A. S. Troelstra. *Lectures on Linear Logic,* Vol. 29 of *CSLI Lecture Notes.* CSLI, 1992.

[17] D. van Dalen. *Intuitionistic Logic,* Vol. 5 of *Handbook of Philosophical Logic,* pp.1–114. Kluwer Academic Pub., 2nd edition, 2002.

[18] M. Zakharyaschev, F. Wolter and A. Chagorv. *Advanced Modal Logic,* Vol. 3 of *Handbook of Philosophical Logic.* Kluwer Academic Pub., 2nd edition, 2001.

[19] 斎藤 正彦．超積と超準解析 (増補新版)．東京図書.

あとがき

2010 年 3 月 18 日にウオッカの引退が発表された．ウオッカは 2007 年の東京優駿 (日本ダービー) を制覇しているが，牝馬による日本ダービー制覇は 1943 年のクリフジ以来 64 年ぶりのことである．そのクリフジは 11 勝無敗であったが，ウオッカと同い年のアメリカ合衆国の牝馬ゼニヤャッタはまだ無敗 (16 勝) である．ゼニヤャッタが無敗のまま引退するかどうかは分からない．本書の「命題論理の意味論」のところの例文として 1990 年代の古い事項についての文が出てくる．ゼニヤャッタについての事項のような新しいものと変えることも考えたが，最初の草稿ができたころの時代を反映しているのもいいだろうということでそのままにした．

私が本書の原形を 17, 8 年ほど前に書き始めたのは，出版の当てもなくということではなかった．ある出版社から「論理学」という書名ですぐにでも出版されるという目論見であった．その「論理学」の 1 章と 2 章を書き始めたのである．著者は 3 人で，古森が 1 章と 2 章，小野寛晰さんが 3 章，A 氏が 4 章をそれぞれ担当する，というものであった．また，内容は 1 章が「命題論理」，2 章が「述語論理」，3 章が「いろいろな論理」，4 章が「Prolog」ということであった．私と小野さんは原稿を書き上げたのであるが，A 氏の原稿ができあがらず「論理学」は幻の書となってしまった．

小野さんとは若いころよく一緒に山を登った．歩きながら語ることは健康にも数学にもいいようである．山ではなく地下鉄の通路であったが，九州大学の廣川佐千男さんと話していて新しい定理とその証明を発見したことがある．本書の読者諸氏にも，本書と紙と鉛筆をリュックに入れて数理論理学を語り合える友と旅に出ることをお勧めしたい．

古森雄一

共著者の古森雄一さんとは，私が 30 を過ぎたころからよく一緒に山登りをした．山道を歩きながら，そしてまた山登りの行き帰りの電車の中で，果てしのないおしゃべりや議論をした．話題はたわいのないうわさ話から数学の問題まで多岐に及んだが，歩きながら数学の話をするときには数式を紙に書くこともできず，随分もどかしい思いをしたことを思い出す．

2 人がよく議論した論理学の話題は，そのころ共通に関心を持っていた中間論理や部分構造論理に関するものが多い．私たちが部分構造論理について研究を始めたのは 80 年代の初め

であるが，そのときは「部分構造論理」という言葉は世の中になかった．たまたまある会合で 2 人が一緒になり，そのときの議論がきっかけになって研究が始まったのだった．それから 1 年ほどかかって論文が完成し，さらにもう 1 年後の 1985 年に出版された．この論文はいまでは部分構造論理に関するひとつの基本的文献と見なされている．ただし部分構造論理という言葉が使われるようになったのは 1990 年のドイツでの国際会議以降である． 私が担当した 4 章ではこれらの中間論理や部分構造論理のほか，基本的な非標準論理である直観主義論理や様相論理のさまざまな体系を紹介している．また最近大きな関心を集めている「論理学への代数的アプローチ」の基礎となる普遍代数や代数的論理学の一端にもふれた．

まえがきでも述べたことだが，私は本書の構成や内容の展開の仕方は他にないユニークなものだと思っている．当然のことながらユニークさ自体が目的なのではない．紋切り型の慣習的な考え方から自由であってほしいという私たちの意図がこのような形になったのだ．この本が読者の好奇心を刺激し，さらに新たな理解の獲得やさらに発見につながってほしいと願っている．そして，数学とはどこからかあたえられるものではなく，自分たちが考え作り出していくものなのだ，ということを少しでも読者に伝えたいと思っている．

小野寛晰

索引