

情報数学特論 VII レポート問題

2004 年 1 月 22 日 (木)

次のような述語論理の言語と公理を考える。言語: 2 変数述語 $=$; 0 変数関数 $0, 1$;
1 変数関数 $-, abs, nor, regtrig$; 2 変数関数 $+, *$
公理:

1. $\forall x \forall y \forall z ((x + y) + z = x + (y + z)),$
2. $\forall x \forall y (x + y = y + x),$
3. $\forall x (x + 0 = x),$
4. $\forall x (x + (-x) = 0),$
5. $\forall x (abs(-x) = abs(x)),$
6. $\forall x (abs(0) = 0),$
7. $\forall x (abs(abs(x) + abs(y)) = abs(x) + abs(y)),$
8. $\forall x (abs(regtrig(x)) = abs(x)),$
9. $\forall x (abs(regtrig(x) + (-x)) = abs(x)),$
10. $\forall x \forall y (abs(x * y) = abs(x) * abs(y)),$
11. $\forall x (abs(nor(x)) = 1),$
12. $\forall x (x * 1 = x),$
13. $\forall x \forall y \forall z ((y * x) + (z * x) = (y + z) * x),$
14. $\forall x (x = abs(x) * nor(x)).$

ここで d, e, f を a, b, c を使って次のように定義する。

$$D. \quad d = regtrig(b + (-a)) + a,$$

$$E. \quad e = abs(c + (-b)) * nor(b + (-d)) + b,$$

$$F. \quad f = abs(e + (-d)) * nor(a + (-d)) + d.$$

このとき,

$$abs(f + (-a)) = abs(c + (-b))$$

が等号を含む古典述語論理と上の公理と定義から証明できることを OTTER を使って確かめよ。

以下に関数記号の直観的意味を記す。もちろん証明にはこれらの直観的意味を用いてはいけない。

1. $x + y$: 平面上の点をベクトルとみなし, ベクトル x, y の和。
2. $-x$: ベクトル x の反対向きで大きさがベクトル x と同じベクトル。
3. $x * y$: スカラー x とベクトル y の積。スカラーはベクトルと別物ではなく特殊なベクトルをスカラーとみなしている。
4. $abs(x)$: ベクトル x の大きさ。
5. $nor(x)$: ベクトル x と同じ方向の大きさ 1 のベクトル。
6. $regtrig(x)$: x と原点を頂点とする正三角形の頂点。