情報論理学 レポート問題

2003 年 7 月 8 日 (火)

「ユークリッド原論」の第一巻の 2 までを古典述語論理の上での形式化を次のように試みる。

言語: 2 変数述語 $=$; 0 変数関数 0, 1; 1 変数関数 $-, abs, nor, regtrig$; 2 変数関数 $+, *$

公理:

$$
\begin{array}{rl}
1. & \forall x \forall y \forall z((x+y)+z = x+(y+z)), \\
2. & \forall x \forall y (x+y = y+x), \\
3. & \forall x (x+0 = x), \\
4. & \forall x (x+(-x) = 0), \\
5. & \forall x (abs(-x) = abs(x)), \\
6. & \forall x (abs(0) = 0), \\
7. & \forall x (abs(abs(x)+abs(y)) = abs(x)+abs(y)), \\
8. & \forall x (abs(regtrig(x)) = abs(x)), \\
9. & \forall x (abs(regtrig(x)+(-x)) = abs(x)), \\
10. & \forall x \forall y (abs(x*y) = abs(x)*abs(y)), \\
11. & \forall x (abs(nor(x)) = 1), \\
12. & \forall x (x*1 = x), \\
13. & \forall x \forall y \forall z((y*x)+(z*x) = (y+z)*x), \\
14. & \forall x (x = abs(x)*nor(x)).
\end{array}
$$

ここで d, e, f を次のように定義する。

$$
\begin{array}{rl}
D. & d = regtrig(b+(-a))+a, \\
E. & e = abs(c+(-b))*nor(b+(-d))+b, \\
F. & f = abs(e+(-d))*nor(a+(-d))+d.
\end{array}
$$

このとき, 第一巻の 2 の主張は

$$abs(f+(-a)) = abs(c+(-b))$$

となる。

以下の等式を証明せよ。証明には上記の公理以外には述語論理の規則と公理および等号について規則と公理である。証明は日本語で書いてよい。何処でどの公理が使われているかを明記すること。

1. $abs(e + (-d)) = abs(b + (-d)) + abs(c + (-b))$.
2. $abs(abs(e + (-d)) + (-abs(a + (-d))) = abs(e + (-d)) + (-abs(a + (-d)))$.
3. $abs(f + (-a)) = abs(c + (-b))$.

以下に関数記号の直観的意味を記す。もちろん証明にはこれらの直観的意味を用いてはいけない。

1. $x + y$: 平面上の点をベクトルとみなし, ベクトル x, y の和。
2. $-x$: ベクトル x の反対向きで大きさがベクトル x と同じベクトル。
3. $x * y$: スカラー x とベクトル y の積。スカラーはベクトルと別物ではなく特殊なベクトルをスカラーとみなしている。
4. $abs(x)$: ベクトル x の大きさ。
5. $nor(x)$: ベクトル x と同じ方向の大きさ 1 のベクトル。
6. $regtrig(x)$: x と原点を頂点とする正三角形の頂点。