

情報数学 I 試験 1

2002 年 4 月 23 日 (火)

1. $C(CKK)xy \triangleright yx$ が体系 CL_w で証明可能であることを示せ ($C(CKK)xy \triangleright yx$ に至る CL_w の証明図をかけ).
2. $B(BW)(BBC)xyz \triangleright xz(yz)$ が体系 CL_w で証明可能であることを示せ (必ずしも証明図を描かなくてもよい).
3. 任意の項 α に対して, 次の式が証明できる変数 x を含まない項 β が存在することを示せ:

$$\beta x \triangleright \alpha .$$

4. 次を示せ (ただし, I は $Ix \triangleright x$ が CL_w で証明可能な閉項とする).

$$x \triangleright Kxy, K \triangleright KI \vdash_{CL_w} x \triangleright y$$

体系 CL_w の公理型は次の 4 つです.

$$(B) \quad B\alpha\beta\gamma \triangleright \alpha(\beta\gamma)$$

$$(C) \quad C\alpha\beta\gamma \triangleright \alpha\gamma\beta$$

$$(K) \quad K\alpha\beta \triangleright \alpha$$

$$(W) \quad W\alpha\beta \triangleright \alpha\beta\beta$$

証明図は公理を葉とする木状の図形です. 証明図を作るための規則を推論規則 (rule of inference) といいます. 体系 CL_w の推論規則は次の 3 つです:

$$\frac{\beta \triangleright \gamma}{\alpha\beta \triangleright \alpha\gamma} (\mu), \quad \frac{\alpha \triangleright \beta}{\alpha\gamma \triangleright \beta\gamma} (\nu),$$

$$\frac{\alpha \triangleright \beta \quad \beta \triangleright \gamma}{\alpha \triangleright \gamma} (\tau).$$

体系 CL_w の証明図は公理である式を上端とする木状の図形でした. ここで, 上端にくる式として公理以外のものを認めたものを推論図 (deduction) ということにします. 推論図の上端にある式で公理でないものを, その推論図の仮定 (assumption) といいます. Γ を式の列とします. Γ に含まれる式を仮定とし, $\alpha \triangleright \beta$ に至る CL_w の推論図があるとき, $\Gamma \vdash_{CL_w} \alpha \triangleright \beta$ と書き, CL_w で仮定 Γ から $\alpha \triangleright \beta$ ができるといいます. 推論図の仮定は全て Γ に入っていないかもしれませんが, 実際に上端にない式が Γ に入っている場合もかまいません.