

情報数学 I 試験 2

2003 年 5 月 13 日 (火)

1. $B(BWxyz) \triangleright B(xyz)$ に至る CL_w の証明図をかけ.
2. $B(BW)(BBC)(Kx)yz \triangleright x(yz)$ が体系 CL_w で証明可能であることを示せ (必ずしも証明図を描かなくてもよい).
3. 定数記号 W 含まず変数 x を高々 1 つしか含まない任意の項 α に対して, 次の a, b を満たす項 β が存在することを示せ:
 - (a) 項 β は変数 x と定数記号 W のどちらも含まない,
 - (b) 式 $\beta x \triangleright \alpha$ が CL_w で証明できる.
4. 次を示せ (ただし, I は $Ix \triangleright x$ が CL_w で証明可能な閉項とする).

$$x \triangleright KI(Ky)x, K \triangleright B \vdash_{CL_w} x \triangleright y$$

体系 CL_w の公理型は次の 4 つです.

- (B) $B\alpha\beta\gamma \triangleright \alpha(\beta\gamma)$
- (C) $C\alpha\beta\gamma \triangleright \alpha\gamma\beta$
- (K) $K\alpha\beta \triangleright \alpha$
- (W) $W\alpha\beta \triangleright \alpha\beta\beta$
- (ρ) $\alpha \triangleright \alpha$

証明図は公理を葉とする木状の図形です. 証明図を作るための規則を推論規則 (rule of inference) といいます. 体系 CL_w の推論規則は次の 3 つです:

$$\frac{\beta \triangleright \gamma}{\alpha\beta \triangleright \alpha\gamma} (\mu), \quad \frac{\alpha \triangleright \beta}{\alpha\gamma \triangleright \beta\gamma} (\nu),$$

$$\frac{\alpha \triangleright \beta \quad \beta \triangleright \gamma}{\alpha \triangleright \gamma} (\tau).$$

体系 CL_w の証明図は公理である式を上端とする木状の図形でした. ここで, 上端にくる式として公理以外のものを認めたものを推論図 (deduction) ということにします. 推論図の上端にある式で公理でないものを, その推論図の仮定 (assumption) といいます. Γ を式の列とします. Γ に含まれる式を仮定とし, $\alpha \triangleright \beta$ に至る CL_w の推論図があるとき, $\Gamma \vdash_{CL_w} \alpha \triangleright \beta$ と書き, CL_w で仮定 Γ から $\alpha \triangleright \beta$ ができるといいます. 推論図の仮定は全て Γ に入っていないかもしれませんが, 実際に上端になり式が Γ に入っていないてもかまいません.