

## 情報数学 I 試験 3

2003 年 6 月 10 日 (火)

1. (a) 論理式  $(\beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma$  の HJ の証明図をえがけ。(ヒント: BCK)  
 (b) 論理式  $\neg\neg\alpha \supset \alpha$  の HK の証明図をえがけ。(ヒント: C(L3)N)
2. 論理式  $(\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma$  の NJ の証明図えがけ。
3.  $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$  ならば  $\Gamma \vdash_{HJ} \gamma$  であることを証明せよ。
4. 次の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また、必要最小限の  $\alpha$ -変換をすること。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\alpha \supset \beta}{\beta \supset \alpha \supset \beta} 1}{(\alpha \supset \beta) \supset \beta \supset \alpha \supset \beta} 2 \quad \frac{\alpha \supset \beta}{\beta} 4}{\beta \supset (\alpha \supset \beta)} 3 \\
 \frac{\frac{\alpha \supset \beta}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta} 3}{\beta \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta} 4 \quad \frac{\beta}{\beta} 3}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}
 \end{array}$$

5. 推件式  $\Gamma \rightarrow \gamma$  が LK で証明可能であるならば  $\Gamma \vdash_{HK} \gamma$  であることを体系 HJ と LJ との同値性とグリベンコの定理を使って証明せよ。

直観主義命題論理 HJ の公理型は次の 5 つです。

$$\begin{aligned}
 (B) \quad & (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\
 (C) \quad & (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma \\
 (K) \quad & \alpha \supset \beta \supset \alpha \\
 (W) \quad & (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta \\
 (N) \quad & \perp \supset \alpha
 \end{aligned}$$

古典命題論理 HK の公理型は HJ の 5 つの公理型と次の L3 の 6 つです。

$$(L3) \quad ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha$$

ゲンツェン流の古典命題論理 LK の公理型は次の 2 つです。

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & \alpha \rightarrow \alpha \\
 (N) \quad & \perp \rightarrow \Theta
 \end{aligned}$$

ゲンツェン流の古典命題論理 LK の推論規則は次の 9 つです。

構造に関する推論規則

割増 (weakening)

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha} (\rightarrow w)$$

縮約 (contraction)

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (c \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha} (\rightarrow c)$$

交換 (exchanging)

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (e \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha, \beta, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Theta, \beta, \alpha, \Lambda} (\rightarrow e)$$

切断 (cut)

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda} (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$\supset$  に関する規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \Lambda}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda} (\supset \rightarrow) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta, \beta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$

グリベンコの定理 次の 2 つの条件は同値である。

1.  $\Gamma \rightarrow \Delta$  が LK で証明可能である。
2.  $\neg \Delta, \Gamma \rightarrow \perp$  が LJ で証明可能である。