情報数学I 試験 4

2003 年 6 月 24 日 (火)

1. (a) 論理式 $\alpha \supset (\alpha \supset \beta) \supset \gamma \supset \beta$ の HJ の証明図をえがけ。(ヒント: BK, C)
   (b) 論理式 $\neg\neg\alpha \supset \alpha$ の HK の証明図をえがけ。(ヒント: $C(L3)N$)

2. 論理式 $((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \neg\neg\alpha$ の NJ の証明図をえがけ。

3. $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$ ならば $\Gamma \vdash_{HJ} \gamma$ であることを証明せよ。

4. 次の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また, 必要最小限の α-変換をすること。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{\alpha\supset\beta\supset\gamma}\quad\overset{1}{\alpha}}{\beta\supset\gamma}\qquad\overset{2}{\beta}}{\gamma}}{\alpha\supset\gamma}\,1}{\beta\supset\alpha\supset\gamma}\,2\qquad\dfrac{\overset{2}{\alpha\supset\beta}\quad\overset{1}{\alpha}}{\beta}}{\alpha\supset\gamma}\qquad\overset{1}{\alpha}}{\gamma}$$

5. 推件式 $\Gamma \to \gamma$ が LK で証明可能であるならば $\Gamma \vdash_{HK} \gamma$ であることを体系 HJ と LJ との同値性とグリベンコの定理を使って証明せよ。

直観主義命題論理 HJ の公理型は次の 5 つです。

$$\begin{array}{ll} (B) & (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\ (C) & (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma \\ (K) & \alpha \supset \beta \supset \alpha \\ (W) & (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta \\ (N) & \perp \supset \alpha \end{array}$$

古典命題論理 HK の公理型は HJ の 5 つの公理型と次の $L3$ の 6 つです。

$$(L3) \quad ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha$$

ゲンツェン流の古典命題論理 LK の公理型は次の 2 つです。

$$\begin{array}{llll} (I) & \alpha & \rightarrow & \alpha \\ (N) & \perp & \rightarrow & \Theta \end{array}$$

ゲンツェン流の古典命題論理 LK の推論規則は次の 9 つです。

構造に関する推論規則

割増 (weakening)

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta}\ (w \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha}\ (\rightarrow w)$$

縮約 (contraction)

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta}\ (c \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha}\ (\rightarrow c)$$

交換 (exchanging)

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta}\ (e \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha, \beta, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Theta, \beta, \alpha, \Lambda}\ (\rightarrow e)$$

切断 (cut)

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda}\ (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$\supset$ に関する規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \Lambda}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda}\ (\supset\rightarrow) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta, \beta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \supset \beta}\ (\rightarrow\supset)$$

グリベンコの定理 次の 2 つの条件は同値である。

1. $\Gamma \rightarrow \Delta$ が LK で証明可能である。
2. $\neg\Delta, \Gamma \rightarrow \perp$ が LJ で証明可能である。