

情報数学 I 試験 5

2003 年 7 月 8 日 (火)

1. 論理式 $\neg\neg(((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha)$ の命題論理の体系 NJ の証明図をえがけ。
2. 論理式 $((q_0 \supset q_0) \supset p) \supset (q \supset r) \supset (r \supset q) \supset r$ が体系 HK で証明できないことを示せ。
3. 命題論理の体系 LJ の基本定理 (cut 除去定理) を命題論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。
4. 次の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また, 必要最小限の α -変換をすること。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\alpha \supset \beta \supset \gamma \quad \frac{1}{\alpha}}{3} \quad \frac{2}{\beta}}{\beta \supset \gamma} \\
 \frac{\frac{\gamma}{\alpha \supset \gamma} \quad \frac{1}{\beta \supset \alpha \supset \gamma} \quad \frac{2}{\alpha \supset \beta} \quad \frac{1}{\alpha}}{\alpha \supset \gamma} \quad \frac{4}{\alpha}}{\gamma}
 \end{array}$$

5. HJ の演繹定理 ($\alpha, \Gamma \vdash_{HJ} \beta$ ならば $\Gamma \vdash_{HJ} \alpha \supset \beta$ である) を $\alpha, \Gamma \vdash_{HJ} \beta$ を示す推論図の長さについての帰納法で証明せよ (HJ で $(\alpha \supset \gamma \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \alpha \supset \beta$ が証明できることは使ってよい)。

直観主義命題論理 HJ の公理型は次の 5 つです。

$$\begin{aligned}
 (B) \quad & (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\
 (C) \quad & (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma \\
 (K) \quad & \alpha \supset \beta \supset \alpha \\
 (W) \quad & (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta \\
 (N) \quad & \perp \supset \alpha
 \end{aligned}$$

古典命題論理 HK の公理型は HJ の 5 つの公理型と次の L3 の 6 つです。

$$(L3) \quad ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha$$

命題論理 NJ の推論規則は次の 3 つです。

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha \supset \beta} \quad \frac{\Pi_2}{\alpha}}{\beta} (\supset\text{-E}) \quad \frac{\frac{k}{\alpha} \quad \frac{\Pi}{\beta}}{\alpha \supset \beta} k(\supset\text{-I})$$

$$\frac{\Pi}{\perp} (\perp\text{-E})$$

直観主義命題論理 LJ の公理型は次の 2 つです。

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & \alpha \rightarrow \alpha \\
 (N) \quad & \perp \rightarrow \alpha
 \end{aligned}$$

直観主義命題論理 LJ の推論規則は次の 6 つです。

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (w \rightarrow) \quad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (c \rightarrow)$$

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (e \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (\supset \rightarrow) \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$