

## 情報数学特論 VII 試験 2

2003 年 10 月 28 日 (火)

1. 論理式  $((\alpha \supset \beta) \supset \beta \supset \alpha) \supset \beta \supset \neg\neg\alpha$  の命題論理の体系 NJ の証明図をえがけ。
2. 論理式  $\forall x(px \supset q) \supset \exists x px \supset \neg\neg q$  の述語論理の体系 NJ の証明図をえがけ。
3. 推件式  $\forall x\forall y\forall z(rxy \supset ryz \supset rxz), \forall x\exists y rxy \rightarrow \exists x rxx$  が体系 LK で証明できないことを示せ。
4. 以下の (コンパクト性定理を除く) 諸定理を使ってコンパクト性定理を証明せよ。

定義 0.1 (構造 (structure)) 言語  $\mathcal{L}$  の構造  $\mathcal{A}$  は次の 3 つのものから構成されています:

1.  $\mathcal{A}$  の世界と呼ばれる空でない集合  $|\mathcal{A}|$ .  $|\mathcal{A}|$  の元を  $\mathcal{A}$  の個体とといいます。
2. 言語  $\mathcal{L}$  の各々の  $n$  変数関数記号  $f$  に対して,  $|\mathcal{A}|$  から  $|\mathcal{A}|$  への  $n$  変数関数  $f_{\mathcal{A}}$ . (とくに, 0 変数関数記号  $e$  に対して,  $e_{\mathcal{A}}$  は  $\mathcal{A}$  の個体です.)
3. 言語  $\mathcal{L}$  の各々の  $n$  変数述語記号  $p$  に対して,  $|\mathcal{A}|$  の  $n$  個の直積  $|\mathcal{A}|^n$  の部分集合  $p_{\mathcal{A}}$ .

言語  $\mathcal{L}$  に  $\mathcal{A}$  の個体の全ての名前を付け加えて得られる言語を  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  と書きます. 個体  $c$  の名前を  $\bar{c}$  と書きます.

$t$  を言語  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  の閉項とします. 次に  $\mathcal{A}$  の個体  $\mathcal{A}(t)$  を帰納的に定義します.

1.  $\mathcal{A}(\bar{c}) = c$ ,
2.  $\mathcal{A}(ft_1\dots t_n) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_n))$ .

$\alpha$  を言語  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  の閉論理式とします. 次に  $\alpha$  の真偽値  $\mathcal{A}(\alpha)$  を帰納的に定義します.

## 定義 0.2

1.  $\mathcal{A}(pt_1\dots t_n) = \top \iff p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_n))$ ,
2.  $\mathcal{A}(\perp) = \perp$ ,
3.  $\mathcal{A}(\alpha \supset \beta) = \mathcal{A}(\alpha) \supset \mathcal{A}(\beta)$ ,
4.  $\mathcal{A}(\forall x\alpha) = \top \iff$  任意の  $\mathcal{A}$  の個体  $c$  に対して  $\mathcal{A}([\bar{c}/x]\alpha) = \top$ .

定理 0.3 推件式  $\Gamma \rightarrow \Theta$  が LK で証明可能ならば,  $\Gamma$  と  $\Theta$  のそれぞれの有限部分集合  $\Gamma'$  と  $\Theta'$  が存在して  $\Gamma' \rightarrow \Theta'$  が LK で証明可能である.

$\Gamma \rightarrow \Theta$  を言語  $\mathcal{L}$  の閉推件式とします. 全ての  $\alpha \in \Gamma$  について  $\mathcal{A}(\alpha) = \top$  のときには, ある  $\beta \in \Theta$  が存在して  $\mathcal{A}(\beta) = \top$  となるとき, 推件式  $\Gamma \rightarrow \Theta$  は  $\mathcal{A}$  で正しいといえます.

$\Gamma \rightarrow \Theta$  を言語  $\mathcal{L}$  の推件式とします.  $\Gamma \rightarrow \Theta$  に自由に現れる個体変数の全てを  $y_1, \dots, y_n, \dots$  とします. また,  $t_1, \dots, t_n, \dots$  を言語  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  の閉項とします.  $\Gamma \rightarrow \Theta$  の自由変数  $y_1, \dots, y_n, \dots$  に  $t_1, \dots, t_n, \dots$  をそれぞれ代入して得られる言語  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  の閉推件式を  $\Gamma \rightarrow \Theta$  の  $\mathcal{A}$ -代入例 といえます.  $\Gamma \rightarrow \Theta$  の任意の  $\mathcal{A}$ -代入例  $\Gamma' \rightarrow \Theta'$  が  $\mathcal{A}$  で正しいとき, 推件式  $\Gamma \rightarrow \Theta$  は構造  $\mathcal{A}$  で正しいといえます.

$\Gamma \rightarrow \Theta$  を言語  $\mathcal{L}$  の推件式とします.  $\mathcal{L}$  の任意の構造  $\mathcal{A}$  で  $\Gamma \rightarrow \Theta$  が正しいとき,  $\Gamma \rightarrow \Theta$  を恒真であるといえます.

定理 0.4 (LK の健全性定理) 推件式  $\Gamma \rightarrow \Theta$  が LK で証明できれば,  $\Gamma \rightarrow \Theta$  は恒真である.

推件式  $\Gamma \rightarrow \Theta$  が恒真でないのは, ある構造  $\mathcal{A}$  と  $\Gamma \rightarrow \Theta$  の  $\mathcal{A}$ -代入例  $\Gamma' \rightarrow \Theta'$  が存在して, 全ての  $\alpha \in \Gamma'$  について  $\mathcal{A}(\alpha) = \top$  で全ての  $\beta \in \Theta'$  について  $\mathcal{A}(\beta) = \perp$  となっているときです. このような構造  $\mathcal{A}$  と  $\mathcal{A}$ -代入例  $\Gamma' \rightarrow \Theta'$  の対  $\langle \mathcal{A}, \Gamma' \rightarrow \Theta' \rangle$  を推件式  $\Gamma \rightarrow \Theta$  の反駁 といえます.

定理 0.5 (LK の強完全性定理) 推件式  $\Gamma \rightarrow \Theta$  が恒真ならば  $\Gamma \rightarrow \Theta$  は体系 LK で証明できる.

論理式の集合  $\Gamma$  のモデルとは, 推件式  $\Gamma \rightarrow$  の反駁のことです.  $\Gamma$  が閉論理式の集合のときは,  $\Gamma$  に含まれる全ての論理式  $\alpha$  について  $\mathcal{A}(\alpha) = \top$  となっている構造  $\mathcal{A}$  が  $\Gamma$  のモデルとなります.

定理 0.6 (コンパクト性定理) 論理式の集合の任意の有限部分集合がモデルを持てば, もとの集合もモデルを持つ.

- $\neg\alpha$  は  $\alpha \supset \perp$  を
- $\alpha \wedge \beta$  は  $\neg(\alpha \supset \neg\beta)$  を
- $\alpha \vee \beta$  は  $(\alpha \supset \beta) \supset \beta$  を
- $\alpha \leftrightarrow \beta$  は  $(\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$  を
- $\exists x \alpha$  は  $\neg\forall x\neg\alpha$  を

それぞれ略して書いたものとします.  $\exists$  は「存在する」を表す論理記号です.

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。  
述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\alpha \supset \beta \quad \alpha} (\supset\text{-E}), \quad \frac{\frac{k}{\alpha} \quad \Pi}{\beta} k(\supset\text{-I})$$

$$\frac{\Pi}{\perp} (\perp\text{-E}), \quad \frac{\Pi}{\forall x\alpha} (\forall\text{-I}), \quad \frac{\Pi}{[t/x]\alpha} (\forall\text{-E})$$