

情報数学 I 試験 1

2004 年 4 月 27 日 (火)

1. $C(CKK)xy \triangleright yx$ に至る CL_w の証明図をかけ.
2. $B(BW)(BBC)xyz \triangleright xz(yz)$ が体系 CL_w で証明可能であることを示せ (必ずしも証明図を描かなくてもよい).
3. 任意の項 α に対して, 次の式が体系 CL_w で証明できる変数 x を含まない項 β が存在することを示せ:

$$\beta x \triangleright \alpha .$$

4. (a) 論理式 $(\beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma$ の HK の証明図をえがけ。 (ヒント: BCK)
(b) 論理式 $\neg\neg\alpha \supset \alpha$ の HK の証明図をえがけ。 (ヒント: $C(L3)N$)

体系 CL_w の公理型は次の 4 つです.

$$(B) \quad B\alpha\beta\gamma \triangleright \alpha(\beta\gamma)$$

$$(C) \quad C\alpha\beta\gamma \triangleright \alpha\gamma\beta$$

$$(K) \quad K\alpha\beta \triangleright \alpha$$

$$(W) \quad W\alpha\beta \triangleright \alpha\beta\beta$$

$$(\rho) \quad \alpha \triangleright \alpha$$

証明図は公理を葉とする木状の図形です. 証明図を作るための規則を推論規則 (rule of inference) といいます. 体系 CL_w の推論規則は次の 3 つです:

$$\frac{\beta \triangleright \gamma}{\alpha\beta \triangleright \alpha\gamma} (\mu), \quad \frac{\alpha \triangleright \beta}{\alpha\gamma \triangleright \beta\gamma} (\nu),$$

$$\frac{\alpha \triangleright \beta \quad \beta \triangleright \gamma}{\alpha \triangleright \gamma} (\tau).$$

古典命題論理 HK の公理型は次の 6 つです.

$$(B) \quad (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma$$

$$(C) \quad (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma$$

$$(K) \quad \alpha \supset \beta \supset \alpha$$

$$(W) \quad (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta$$

$$(L3) \quad ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha$$

$$(N) \quad \perp \supset \alpha$$