情報数学I 試験 3

2004 年 6 月 1 日 (火)

1. HJ の演繹定理 「$\alpha, \Gamma \vdash_{HJ} \beta$　ならば　$\Gamma \vdash_{HJ} \alpha \supset \beta$　である」を証明せよ。ただし, $\vdash_{HJ} (\alpha \supset \gamma \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \alpha \supset \beta$ であることは用いてよい。

2. 論理式 $((\alpha \supset \beta) \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\gamma$ の NJ の証明図をえがけ。

3. (a) $\vdash_{NJ} (\alpha \supset \neg\neg\beta) \supset \neg\neg(\alpha \supset \beta)$　および
   $\vdash_{NJ} \neg\neg(\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\alpha \supset \neg\neg\gamma$　を示せ。

   (b) $\Gamma \vdash_{NK} \gamma$ ならば $\Gamma \vdash_{NJ} \neg\neg\gamma$ であることを $\Gamma \vdash_{NK} \gamma$ を示す推論図の長さについての帰納法で証明せよ。(体系 NK の定義は次ページにある。)

4. 次の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また, 必要最小限の α-変換をすること。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{\alpha \supset \beta \supset \gamma} \quad \overset{1}{\alpha}}{\beta \supset \gamma} \quad \overset{2}{\beta}}{\gamma}}{\alpha \supset \gamma}\,1}{\beta \supset \alpha \supset \gamma}\,2 \quad \dfrac{\overset{2}{\alpha \supset \beta} \quad \overset{1}{\alpha}}{\beta}}{\alpha \supset \gamma} \quad \overset{1}{\alpha}}{\gamma}$$

5. 推件式 $\Gamma \to \gamma$ が LK で証明可能であるならば $\Gamma \vdash_{HK} \gamma$ であることを体系 HJ と LJ との同値性とグリベンコの定理を使って証明せよ。

直観主義命題論理 HJ の公理型は次の 5 つです。

$$\begin{array}{ll} (B) & (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\ (C) & (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma \\ (K) & \alpha \supset \beta \supset \alpha \\ (W) & (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta \\ (N) & \bot \supset \alpha \end{array}$$

古典命題論理 HK の公理型は HJ の 5 つの公理型と次の $L3$ の 6 つです。

$$(L3) \quad ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha$$

古典命題論理 NK は体系 NJ に次の二重否定の除去規則 (¬-E) を付け加えたものである:

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\ (\neg\text{-E}).$$

ゲンツェン流の直観主義命題論理 LJ の公理型は次の 2 つです。

$$\begin{array}{llll} (I) & \alpha & \to & \alpha \\ (N) & \bot & \to & \alpha \end{array}$$

ゲンツェン流の直観主義命題論理 LJ の推論規則は次の 6 つです。

構造に関する推論規則

割増 (weakening), 縮約 (contraction)

$$\frac{\Gamma \to \gamma}{\alpha, \Gamma \to \gamma}\ (w \to), \qquad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \to \gamma}{\alpha, \Gamma \to \gamma}\ (c \to)$$

交換 (exchanging), 切断 (cut)

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \to \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \to \gamma}\ (e \to), \qquad \frac{\Gamma \to \alpha \quad \alpha, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \Delta \to \gamma}\ (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$\supset$ に関する規則

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \beta, \Delta \to \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \to \gamma}\ (\supset\to), \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \supset \beta}\ (\to\supset)$$

グリベンコの定理 次の 2 つの条件は同値である。

1. $\Gamma \to \Delta$ が LK で証明可能である。
2. $\neg\Delta, \Gamma \to \bot$ が LJ で証明可能である。