

情報数学 I 試験 5

2004 年 7 月 6 日 (火)

1. 論理式 $((r \supset p) \supset p) \supset (q \supset r) \supset (r \supset q) \supset r$ が体系 HK で証明できないことを示せ。
2. 論理式 $\forall x \neg \neg px \supset \forall x (\neg px \supset q)$ の述語論理の体系 NJ の証明図をえがけ。
3. 論理式 $\forall y (\forall x (\neg pxx \supset pxy) \supset \forall x (pxy \supset \neg pxx) \supset pyy)$ の述語論理の体系 NJ の証明図をえがけ。
4. 次の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また、必要最小限の α -変換をすること。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\alpha \supset \beta}{\beta \supset \alpha \supset \beta} \quad 1}{(\alpha \supset \beta) \supset \beta \supset \alpha \supset \beta} \quad 2 \quad \frac{\alpha \supset \beta}{\beta} \quad 4 \\
 \frac{\beta \supset (\alpha \supset \beta)}{\alpha \supset \beta} \quad 3 \\
 \frac{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}{\beta \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta} \quad 4 \quad \frac{3}{\beta} \\
 \frac{\beta \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}
 \end{array}$$

5. 述語論理の体系 LJ の基本定理を述語論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。(体系 NJ の正規な証明図の長さに関する帰納法によるが、長さが 1 のとき、最後に使われた規則が導入規則のときは省略してよい。最後に使われている規則が消去規則のときだけを書けばよい。)

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。
 古典命題論理 HK の公理型は次の 6 つです。

- (B) $(\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma$
- (C) $(\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma$
- (K) $\alpha \supset \beta \supset \alpha$
- (W) $(\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta$
- (L3) $((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha$
- (N) $\perp \supset \alpha$

古典命題論理 HK の推論規則は次の MP です。

$$\frac{\alpha \supset \beta \quad \alpha}{\beta}$$

直観主義述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha \supset \beta} \quad \frac{\Pi_2}{\alpha}}{\beta} (\supset\text{-E}), \quad \frac{\frac{k}{\alpha} \quad \Pi}{\beta}}{\alpha \supset \beta} k(\supset\text{-I})$$

$$\frac{\Pi}{\perp} (\perp\text{-E}), \quad \frac{\Pi}{\forall x \alpha} (\forall\text{-I}), \quad \frac{\Pi}{\forall x \alpha} (\forall\text{-E}), \quad \frac{\Pi}{[t/x]\alpha} (\forall\text{-E})$$

直観主義述語論理 LJ の公理型は次の 2 つです。

- (I) $\alpha \rightarrow \alpha$
- (N) $\perp \rightarrow \alpha$

直観主義述語論理 LJ の推論規則は次の 8 つです。

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (w \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (c \rightarrow)$$

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (e \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (\supset \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$

$$\frac{[t/x]\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\forall x \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (\forall \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha}{\Gamma \rightarrow \forall x \alpha} (\rightarrow \forall)$$