

情報数学 I 試験 6

2004 年 7 月 20 日 (火)

1. 論理式 $((q \supset p) \supset \neg q) \supset r \rightarrow r$ が古典論理の体系 LK で証明できるならば証明図を書き, 証明できないならばそのことを示せ。
2. 論理式 $\forall x((px \supset q) \supset q) \supset \neg q \supset \forall x \neg \neg px$ の述語論理の体系 NJ の証明図をえがけ。
3. 論理式 $\forall y(\forall x(\neg pxx \supset pxy) \supset \forall x(pxy \supset \neg pxx) \supset pyy)$ の述語論理の体系 NJ の証明図をえがけ。
4. 次の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また, 必要最小限の α -変換をすること。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\alpha \supset \beta \supset \gamma \quad \overset{3}{\alpha}}{\beta \supset \gamma} \quad \overset{2}{\beta}}{\gamma} \\
 \frac{\frac{\alpha \supset \gamma \quad \overset{1}{\alpha}}{\beta \supset \alpha \supset \gamma} \quad \overset{2}{\beta} \quad \frac{\alpha \supset \beta \quad \overset{1}{\alpha}}{\beta} \quad \overset{4}{\alpha}}{\alpha \supset \gamma} \quad \overset{4}{\alpha}}{\gamma}
 \end{array}$$

5. 述語論理 HJ の演繹定理 「 $\alpha, \Gamma \vdash_{HJ} \beta$ ならば $\Gamma \vdash_{HJ} \alpha \supset \beta$ である」を証明せよ。ただし, $\vdash_{HJ} (\alpha \supset \gamma \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \alpha \supset \beta$ であることは用いてよい。

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されていることもある。
直観主義述語論理 HJ の公理型は次の 7 つです。

- (B) $(\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma$
- (C) $(\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma$
- (K) $\alpha \supset \beta \supset \alpha$
- (W) $(\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta$
- (N) $\perp \supset \alpha$
- (F1) $\forall x \alpha \supset [t/x]\alpha$
- (F2) $\forall x(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \forall x\beta$

直観主義述語論理 HJ の推論規則は次の MP と普遍化規則です。

$$\frac{\alpha \supset \beta \quad \alpha}{\beta}, \quad \frac{\alpha}{\forall x \alpha} \quad \text{ただし仮定には変数 } x \text{ が自由に現れない}$$

直観主義述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha \supset \beta} \quad \frac{\Pi_2}{\alpha}}{\beta} (\supset\text{-E}), \quad \frac{\frac{k}{\alpha}}{\beta} \quad \frac{\Pi}{\alpha \supset \beta}}{k} (\supset\text{-I})$$

$$\frac{\Pi}{\perp} (\perp\text{-E}), \quad \frac{\Pi}{\forall x \alpha} (\forall\text{-I}), \quad \frac{\Pi}{[t/x]\alpha} (\forall\text{-E})$$

古典命題論理 LK の公理型は次の 2 つです。

- (I) $\alpha \rightarrow \alpha$
- (N) $\perp \rightarrow \Theta$

古典命題論理 LK の推論規則は次の 9 つありますが, そのうち論理記号に関する推論規則は次の 2 つです。

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \Lambda}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda} (\supset\rightarrow), \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta, \beta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \supset \beta} (\rightarrow\supset)$$