情報数理学特論VII 試験 2

2004 年 11 月 9 日 (火)

1. 論理式 $\neg(((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha) \supset \alpha \supset \beta$ の NJ の証明図をえがけ。
2. 論理式 $\forall x((px \supset q) \supset q) \supset (\neg\neg\forall x \neg\neg px \supset q) \supset \neg\neg q$ の述語論理の体系 NJ の証明図をえがけ.
3. 次の 2 つの推件式が体系 LK で証明できないことを示せ.
   (a) $\forall x\, rxx \to \forall x \forall y \forall z(rxy \supset rxz \supset \neg ryz \supset rzy)$
   (b) $\forall x \forall y \forall z(rxy \supset ryz \supset rxz), \forall x \exists y\, rxy \to \exists x\, rxx$
4. 以下の (コンパクト性定理を除く) 諸定理を使ってコンパクト性定理を証明せよ.

定義 0.1 (構造 (structure)) 言語 $\mathcal{L}$ の構造 $\mathcal{A}$ は次の 3 つのものから構成されています:

1. $\mathcal{A}$ の世界と呼ばれる空でない集合 $|\mathcal{A}|$. $|\mathcal{A}|$ の元を $\mathcal{A}$ の個体といいます.
2. 言語 $\mathcal{L}$ の各々の n 変数関数記号 f に対して, $|\mathcal{A}|$ から $|\mathcal{A}|$ への n 変数関数 $f_{\mathcal{A}}$.
   (とくに, 0 変数関数記号 e に対して, $e_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の個体です.)
3. 言語 $\mathcal{L}$ の各々の n 変数述語記号 p に対して, $|\mathcal{A}|$ の n 個の直積 $|\mathcal{A}|^n$ の部分集合 $p_{\mathcal{A}}$.

言語 $\mathcal{L}$ に $\mathcal{A}$ の個体の全ての名前を付け加えて得られる言語を $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ と書きます. 個体 c の名前を $\bar{c}$ と書きます.
t を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします. 次に $\mathcal{A}$ の個体 $\mathcal{A}(t)$ を帰納的に定義します.

1. $\mathcal{A}(\bar{c}) = c$,
2. $\mathcal{A}(ft_1...t_n) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), ..., \mathcal{A}(t_n))$.

α を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉論理式とします. 次に α の真偽値 $\mathcal{A}(\alpha)$ を帰納的に定義します.

定義 0.2

1. $\mathcal{A}(pt_1...t_n) = \top \Longleftrightarrow p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), ..., \mathcal{A}(t_n))$,

2. $\mathcal{A}(\perp) = \perp$,

3. $\mathcal{A}(\alpha \supset \beta) = \mathcal{A}(\alpha) \supset \mathcal{A}(\beta)$,

4. $\mathcal{A}(\forall x\alpha) = \top \iff$ 任意の $\mathcal{A}$ の個体 c に対して $\mathcal{A}([\bar{c}/x]\alpha) = \top$.

定理 0.3 推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で証明可能ならば, Γ と Θ のそれぞれの有限部分集合 Γ' と Θ' が存在して $\Gamma' \to \Theta'$ が LK で証明可能である.

$\Gamma \to \Theta$ を言語 $\mathcal{L}$ の閉推件式とします. 全ての $\alpha \in \Gamma$ について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ のときには, ある $\beta \in \Theta$ が存在して $\mathcal{A}(\beta) = \top$ となるとき, 推件式 $\Gamma \to \Theta$ は $\mathcal{A}$ で正しいといいます.

$\Gamma \to \Theta$ を言語 $\mathcal{L}$ の推件式とします. $\Gamma \to \Theta$ に自由に現れる個体変数の全てを $y_1, ..., y_n, ...$ とします. また, $t_1, ..., t_n, ...$ を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします. $\Gamma \to \Theta$ の自由変数 $y_1, ..., y_n, ...$ に $t_1, ..., t_n, ...$ をそれぞれ代入して得られる言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉推件式を $\Gamma \to \Theta$ の **$\mathcal{A}$-代入例** といいます. $\Gamma \to \Theta$ の任意の $\mathcal{A}$-代入例 $\Gamma' \to \Theta'$ が $\mathcal{A}$ で正しいとき, 推件式 $\Gamma \to \Theta$ は構造 $\mathcal{A}$ で正しいといいます.

$\Gamma \to \Theta$ を言語 $\mathcal{L}$ の推件式とします. $\mathcal{L}$ の任意の構造 $\mathcal{A}$ で $\Gamma \to \Theta$ が正しいとき, $\Gamma \to \Theta$ を**恒真**であるといいます.

定理 0.4 (LK の健全性定理) 推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で証明できれば, $\Gamma \to \Theta$ は恒真である.

推件式 $\Gamma \to \Theta$ が恒真でないのは, ある構造 $\mathcal{A}$ と $\Gamma \to \Theta$ の $\mathcal{A}$-代入例 $\Gamma' \to \Theta'$ が存在して, 全ての $\alpha \in \Gamma'$ について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ で 全ての $\beta \in \Theta'$ について $\mathcal{A}(\beta) = \perp$ となっているときです. このような構造 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$-代入例 $\Gamma' \to \Theta'$ の対 $< \mathcal{A}, \Gamma' \to \Theta' >$ を推件式 $\Gamma \to \Theta$ の**反駁**といいます.

定理 0.5 (LK の強完全性定理) 推件式 $\Gamma \to \Theta$ が恒真ならば $\Gamma \to \Theta$ は体系 LK で証明できる.

論理式の集合 Γ の**模型**とは, 推件式 $\Gamma \to$ の反駁のことです. Γ が閉論理式の集合のときは, Γ に含まれる全ての論理式 α について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ となっている構造 $\mathcal{A}$ が Γ の模型となります.

定理 0.6 (コンパクト性定理) 論理式の集合の任意の有限部分集合が模型を持てば, もとの集合も模型を持つ.

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。

述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \alpha\supset\beta\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Pi_2\\ \alpha\end{matrix}}{\beta}\,(\supset\text{-E}),\qquad \dfrac{\begin{matrix}\overset{k}{\alpha}\\ \Pi\\ \beta\end{matrix}}{\alpha\supset\beta}\,k(\supset\text{-I})$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \perp\end{matrix}}{\alpha}\,(\perp\text{-E}),\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \alpha\end{matrix}}{\forall x\alpha}\,(\forall\text{-I}),\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \forall x\alpha\end{matrix}}{[t/x]\alpha}\,(\forall\text{-E})$$