情報数理学特論VII 試験 3

2004 年 11 月 30 日 (火)

1. 論理式　$\neg\neg(((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha)$　の NJ の証明図をえがけ。
2. 次を示せ (ただし, I は $\mathsf{I}x \rhd x$ が CLw で証明可能な閉項とする)。

$$\mathsf{KI} \rhd_1 \mathsf{K} \vdash_{CLw} x = y$$

3. 式　$\mathsf{S(KS)} : (\delta \supset \alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \delta \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma$　の HK の証明図をえがけ。
4. $\lambda^* x.xyy$ を求め, $(\lambda^* x.xyy)x$ の正規形を求めよ (どちらも途中経過を書くこと)。

命題論理 NJ の推論規則は次の 3 つです。

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \alpha \supset \beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ \alpha\end{matrix}}{\beta}\ (\supset\text{-E}), \qquad \dfrac{\begin{matrix}\overset{k}{\alpha} \\ \Pi \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \supset \beta}\ k(\supset\text{-I})$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi \\ \bot\end{matrix}}{\alpha}\ (\bot\text{-E}),$$

体系 CLw の公理型は次の 3 つです.

$$\begin{array}{ll} (\mathsf{K}) & \mathsf{K}MN \rhd_1 M \\ (\mathsf{S}) & \mathsf{S}MNR \rhd_1 MR(NR) \\ (\rho) & M \rhd M \end{array}$$

体系 CLw の推論規則は次の 7 つです:

$$\dfrac{N \rhd_1 R}{MN \rhd_1 MR}\ (\mu), \qquad \dfrac{M \rhd_1 N}{MR \rhd_1 NR}\ (\nu),$$

$$\dfrac{M \rhd_1 N}{M \rhd N}\ (\kappa), \qquad \dfrac{M \rhd_1 N \quad N \rhd R}{M \rhd R}\ (\tau),$$

$$\dfrac{M \rhd N}{M = N}\ (\kappa =), \qquad \dfrac{M = N}{N = M}\ (\sigma), \qquad \dfrac{M = N \quad N = R}{M = R}\ (\tau =).$$

古典命題論理 (classical propositional logic) HK の公理型は次の 4 つです.

$$\begin{array}{l} \mathsf{K} : \alpha \supset \beta \supset \alpha \\ \mathsf{S} : (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\ \mathsf{P} : ((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha \\ \mathsf{A} : \bot \supset \alpha \end{array}$$

定義 0.1 (抽象) M を CL-項, x を変数とする. 変数 x を含まない項 $(\lambda^* x.M)$ を以下のように帰納的に定義する.

1. $(\lambda^* x.M) \equiv (\mathsf{K}M)$ $(x \notin FV(M)$ のとき),
2. $(\lambda^* x.x) \equiv \mathsf{I}$ (ただし $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$),
3. $(\lambda^* x.UV) \equiv \mathsf{S}(\lambda^* x.U)(\lambda^* x.V)$ $(x \in FV(UV)$ のとき).