情報数理学特論VII 試験 5

2005 年 1 月 11 日 (火)

1. 論理式 $((\alpha \supset \beta) \supset \beta \supset \alpha) \supset \beta \supset \neg\neg\alpha$ の NJ の (省略形でない) 証明図をえがけ。

2. 次のことを HJ の演繹定理と M_H の定義による帰納法により証明せよ:
$\Gamma \vdash_{NJ} M : \gamma$ ならば $\Gamma \vdash_{HJ} M_H : \gamma$ である.

3. 次の (省略形の) 推論図の (省略形でない) 正規形をもとめよ. 途中経過も書くこと. また, 必要最小限の α-変換をすること.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{z : \alpha \supset \beta}{\beta \supset \alpha \supset \beta}\lambda u}{(\alpha \supset \beta) \supset \beta \supset \alpha \supset \beta}\lambda z \quad y : \alpha \supset \beta}{\beta \supset \alpha \supset \beta} \quad x : \beta}{\alpha \supset \beta}}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}\lambda y}{\beta \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}\lambda x \quad y : \beta}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta \quad y : \alpha \supset \beta}{\alpha \supset \beta}}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}\lambda y}{((\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}\lambda x \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \alpha \supset \beta \quad y : \alpha}{\beta}}{\alpha \supset \beta}\lambda y}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}\lambda x}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}$$

直観主義命題論理 NJ の推論規則は次の 3 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta}, \qquad \frac{\begin{array}{c} x : \alpha \\ \Pi \\ M : \beta \end{array}}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \bot}{\mathsf{A}M : \alpha}$$

直観主義命題論理 HJ の公理型は次の 3 つです。

$$\begin{array}{l} \mathsf{K} : \alpha \supset \beta \supset \alpha \\ \mathsf{S} : (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\ \mathsf{A} : \bot \supset \alpha \end{array}$$

定義 0.1 (抽象) M を CL-項, x を変数とする. 変数 x を含まない項 $(\lambda^* x.M)$ を以下のように帰納的に定義する.

1. $(\lambda^* x.M) \equiv (\mathsf{K}M) \quad (x \notin FV(M)$ のとき$)$,
2. $(\lambda^* x.x) \equiv \mathsf{I} \quad ($ただし $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK})$,
3. $(\lambda^* x.UV) \equiv \mathsf{S}(\lambda^* x.U)(\lambda^* x.V) \quad (x \in FV(UV)$ のとき$)$.

定理 0.2 (HJ の演繹定理) $x : \alpha, \Gamma \vdash_{HJ} M : \beta$ かつ Γ に変数 x が現れないならば $\Gamma \vdash_{HJ} \lambda^* x.M : \alpha \supset \beta$ である.

ラムダ項 M から CL-項 M_H への変換は次のように帰納的に定義される:

$$x_H \equiv x, \quad \mathsf{A}_H \equiv \mathsf{A} \quad (MN)_H \equiv M_H N_H, \quad (\lambda x.M)_H \equiv \lambda^* x.M_H.$$