

情報数学特論VII 試験 6

2005 年 1 月 25 日 (火)

1. 論理式 $((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \neg\neg\alpha$ の NJ の (省略形でない) 証明図をえがけ.
2. 次のことを HJ の演繹定理と M_H の定義による帰納法により証明せよ:
 $\Gamma \vdash_{NJ} M : \gamma$ ならば $\Gamma \vdash_{HJ} M_H : \gamma$ である.
3. 次の (省略形の) 推論図の (省略形でない) 正規形をもとめよ. 途中経過も書くこと. また, 必要最小限の α -変換をすること.

(a)

$$\frac{\frac{\frac{z : \alpha \supset \beta \supset \gamma \quad y : \alpha}{\beta \supset \gamma} \quad x : \beta}{\frac{\frac{\frac{\gamma}{\alpha \supset \gamma} \lambda y}{\beta \supset \alpha \supset \gamma} \lambda x \quad \frac{x : \alpha \supset \beta \quad y : \alpha}{\beta}}{\alpha \supset \gamma} \quad u : \alpha}{\gamma}}$$

(b)

$$\frac{\frac{\frac{x : (\beta \supset \gamma) \supset \gamma \quad \frac{z : \alpha \supset \beta \supset \gamma \quad y : \alpha}{\beta \supset \gamma}}{\frac{\frac{\gamma}{\alpha \supset \gamma} \lambda y}{((\beta \supset \gamma) \supset \gamma) \supset \alpha \supset \gamma} \lambda x} \quad \frac{\frac{z : \beta \supset \gamma \quad y : \beta}{\gamma} \lambda z}{(\beta \supset \gamma) \supset \gamma}}{\alpha \supset \gamma}}$$

4. 次のラムダ項は型付け可能か? 型付け可能 (そのラムダ項を M とする) ならば $\vdash_{NJ} M : \alpha$ を示す推論図を描け. 型 α はなるべく一般的な型を求めよ. 型付け可能でないときはそのことを説明せよ:

(1) $\lambda xyz.xz(yz)$, (2) $(\lambda xy.xy)(\lambda xy.x)$, (3) $\lambda xy.xxy$.

直観主義命題論理 NJ の推論規則は次の 3 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta}, \quad \frac{\frac{x : \alpha}{\Pi} \quad M : \beta}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \perp}{\Lambda M : \alpha}$$

直観主義命題論理 HJ の公理型は次の 3 つです。

$$\begin{aligned} K : \alpha \supset \beta \supset \alpha \\ S : (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\ A : \perp \supset \alpha \end{aligned}$$

定義 0.1 (抽象) M を CL-項, x を変数とする. 変数 x を含まない CL-項 $(\lambda^*x.M)$ を以下のように帰納的に定義する.

1. $(\lambda^*x.M) \equiv (KM)$ ($x \notin FV(M)$ のとき),
2. $(\lambda^*x.x) \equiv I$ (ただし $I \equiv SKK$),
3. $(\lambda^*x.UV) \equiv S(\lambda^*x.U)(\lambda^*x.V)$ ($x \in FV(UV)$ のとき).

定理 0.2 (HJ の演繹定理) $x : \alpha, \Gamma \vdash_{HJ} M : \beta$ かつ Γ に変数 x が現れないならば $\Gamma \vdash_{HJ} \lambda^*x.M : \alpha \supset \beta$ である.

ラムダ項 M から CL-項 M_H への変換は次のように帰納的に定義される:

$$x_H \equiv x, \quad A_H \equiv A \quad (MN)_H \equiv M_H N_H, \quad (\lambda x.M)_H \equiv \lambda^*x.M_H.$$