情報数学I 試験 3

2005 年 5 月 31 日 (火)

1. 演繹定理を証明せよ。

2. (a) $\vdash_{NJ} ((\alpha \supset \beta) \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\gamma$ を示せ (すなわち, 式 $M : ((\alpha \supset \beta) \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\gamma$ が NJ で証明可能となる閉項 M を見つけ, その式の証明図をえがく)。
   (b) $\vdash_{NJ} \lambda xy.y(\lambda z.\mathsf{A}(xz(\lambda z.y(\lambda y.z)))) : (\alpha \supset \neg\neg\beta) \supset \neg\neg(\alpha \supset \beta)$ を示せ。
   (c) $\vdash_{NJ} \neg\neg\neg\neg\alpha \supset \neg\neg\alpha$ を示せ。
   (d) $\vdash_{NJ} \neg\neg(\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\alpha \supset \neg\neg\gamma$ を示せ。

3. 上の 2c, 2d で求めた閉ラムダ項をそれぞれ U, V とする。M を定数 D を含むかも知れないラムダ項とする。D を含まないラムダ項 M^j を以下のように帰納的に定義する。
   (a) $x^j \equiv \lambda y.yx$,
   (b) $(\mathsf{D}N)^j \equiv UN^j$,
   (c) $(\mathsf{A}N)^j \equiv (\lambda x.\mathsf{A}(x(\lambda x.x)))N^j$,
   (d) $(NR)^j \equiv VN^jR^j$,
   (e) $(\lambda x.N)^j \equiv (\lambda xy.y(\lambda z.\mathsf{A}(xz(\lambda z.y(\lambda y.z)))))(\lambda x.N^j)$.

   このとき, $\Gamma \vdash_{NK} M : \gamma$ ならば $\Gamma \vdash_{NJ} M^j : \neg\neg\gamma$ であることをラムダ項 M の長さについての帰納法で証明せよ。(体系 NK の定義は次ページにある。)

4. 次の省略形の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また, 必要最小限の α-変換をすること。正規形については省略形でないものをえがけ。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{z:\alpha\supset\beta\supset\gamma \quad x:\alpha}{\beta\supset\gamma} \quad y:\beta}{\gamma}}{\alpha\supset\gamma}\lambda x}{\beta\supset\alpha\supset\gamma}\lambda y \quad \dfrac{y:\alpha\supset\beta \quad x:\alpha}{\beta}}{\alpha\supset\gamma} \quad x:\alpha}{\gamma}$$

古典命題論理 (classical propositional logic) HK の公理型は次の 4 つである:

$$\begin{aligned}&\mathsf{K} : \alpha \supset \beta \supset \alpha\\&\mathsf{S} : (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma\\&\mathsf{P} : ((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha\\&\mathsf{A} : \bot \supset \alpha\end{aligned}$$

直観主義命題論理 (intuitionistic propositional logic) NJ の推論規則は次の 3 つである:

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \quad , \quad \frac{\begin{array}{c} x : \alpha \\ \Pi \\ M : \beta \end{array}}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta} \quad , \quad \frac{M : \bot}{\mathsf{A}M : \alpha} \quad .$$

古典命題論理 NK は体系 NJ に次の二重否定の除去規則を付け加えたものである:

$$\frac{M : \neg\neg\alpha}{\mathsf{D}M : \alpha} \quad .$$

定義 0.1 (抽象) M を CL-項, x を変数とする. 変数 x を含まない項 $(\lambda^* x.M)$ を以下のように帰納的に定義する.

1. $(\lambda^* x.M) \equiv (\mathsf{K}M) \quad (x \notin FV(M)$ のとき$)$,
2. $(\lambda^* x.x) \equiv \mathsf{I} \quad ($ただし $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK})$,
3. $(\lambda^* x.UV) \equiv \mathsf{S}(\lambda^* x.U)(\lambda^* x.V) \quad (x \in FV(UV)$ のとき$)$.

定理 0.2 (演繹定理) $x : \alpha, \Gamma \vdash_{HK} M : \beta$ かつ Γ に変数 x が現れないならば $\Gamma \vdash_{HK} \lambda^* x.M : \alpha \supset \beta$ である.