

情報数学 I 試験 4

2005 年 6 月 14 日 (火)

1. 演繹定理を証明せよ。
2. (a) $\vdash_{NJ} ((\alpha \supset \beta) \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\gamma$ を示せ (すなわち, 式 $M : ((\alpha \supset \beta) \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\gamma$ が NJ で証明可能となる閉項 M を見つけ, その式の証明図をえがく)。
 (b) $\vdash_{NJ} (\alpha \supset \neg\neg\beta) \supset \neg\neg(\alpha \supset \beta)$ を示せ。
 (c) $\vdash_{NJ} \neg\neg\neg\neg\alpha \supset \neg\neg\alpha$ を示せ。
 (d) $\vdash_{NJ} \neg\neg(\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\alpha \supset \neg\neg\gamma$ を示せ。
3. 上の 2b, 2c, 2d で求めた閉ラムダ項をそれぞれ T, U, V とする。 M を定数 D を含むかも知れないラムダ項とする。 D を含まないラムダ項 M^j を以下のように帰納的に定義する。
 (a) $x^j \equiv \lambda y. yx$,
 (b) $(DN)^j \equiv UN^j$,
 (c) $(AN)^j \equiv (\lambda x. A(x(\lambda x. x)))N^j$,
 (d) $(NR)^j \equiv VN^jR^j$,
 (e) $(\lambda x. N)^j \equiv T(\lambda x. N^j)$.

このとき, $\Gamma \vdash_{NK} M : \gamma$ ならば $\Gamma \vdash_{NJ} M^j : \neg\neg\gamma$ であることをラムダ項 M の長さについての帰納法で証明せよ。(体系 NK の定義は次ページにある。)

4. 次の省略形の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また, 必要最小限の α -変換をすること。正規形については省略形でないものをえがけ。

$$\frac{\frac{\frac{x : (\beta \supset \gamma) \supset \gamma}{\frac{\frac{\gamma}{\alpha \supset \gamma}}{\lambda y}}{\lambda x}}{((\beta \supset \gamma) \supset \gamma) \supset \alpha \supset \gamma} \quad \frac{\frac{z : \alpha \supset \beta \supset \gamma \quad y : \alpha}{\beta \supset \gamma}}{\frac{\frac{z : \beta \supset \gamma \quad y : \beta}{\gamma}}{(\beta \supset \gamma) \supset \gamma} \lambda z}}{\alpha \supset \gamma}}$$

古典命題論理 (classical propositional logic) HK の公理型は次の 4 つである:

$$\begin{aligned} K &: \alpha \supset \beta \supset \alpha \\ S &: (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\ P &: ((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha \\ A &: \perp \supset \alpha \end{aligned}$$

直観主義命題論理 (intuitionistic propositional logic) NJ の推論規則は次の 3 つである:

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta}, \quad \frac{x : \alpha \quad \Pi}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}, \quad \frac{M : \perp}{AM : \alpha}.$$

古典命題論理 NK は体系 NJ に次の二重否定の除去規則を付け加えたものである:

$$\frac{M : \neg\neg\alpha}{DM : \alpha}.$$

定義 0.1 (抽象) M を CL-項, x を変数とする. 変数 x を含まない項 $(\lambda^*x.M)$ を以下のように帰納的に定義する.

1. $(\lambda^*x.M) \equiv (KM)$ ($x \notin FV(M)$ のとき),
2. $(\lambda^*x.x) \equiv I$ (ただし $I \equiv SKK$),
3. $(\lambda^*x.UV) \equiv S(\lambda^*x.U)(\lambda^*x.V)$ ($x \in FV(UV)$ のとき).

定理 0.2 (演繹定理) $x : \alpha, \Gamma \vdash_{HK} M : \beta$ かつ Γ に変数 x が現れないならば $\Gamma \vdash_{HK} \lambda^*x.M : \alpha \supset \beta$ である.