

情報数学 I 試験 5

2005 年 7 月 5 日 (火)

1. 次の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また、必要最小限の α -変換をすること。

$$\frac{\frac{\frac{y : \alpha \supset \beta}{\beta \supset \alpha \supset \beta} \lambda x}{(\alpha \supset \beta) \supset \beta \supset \alpha \supset \beta} \lambda y \quad z : \alpha \supset \beta}{\beta \supset (\alpha \supset \beta)} \quad w : \beta$$

$$\frac{\frac{\frac{\alpha \supset \beta}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta} \lambda z}{\beta \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta} \lambda w \quad z : \beta}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}$$

2. $(\lambda xyz.xz(yz))(\lambda x.x) \equiv_{\alpha} (\lambda yzx.yx(zx))(\lambda y.y)$ を示す体系 $\lambda\alpha$ の証明図をえがけ。
3. $V \equiv \lambda y.x(yy)$, $Y \equiv \lambda x.VV$ とする。このとき $Yx =_{\beta} x(Yx)$ であることを示せ ($\vdash_{\lambda\beta} Yx = x(Yx)$ を示す証明図はえがかなくてもよい)。
4. 命題論理の体系 LJ の基本定理を命題論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。
5. 論理式 $((r \supset p) \supset p) \supset (q \supset r) \supset (r \supset q) \supset r$ が古典命題論理の体系 HK で証明できないことを示せ。

直観主義命題論理 NJ の推論規則は次の 3 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta}, \quad \frac{x : \alpha \quad \Pi \quad M : \beta}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \perp}{\Lambda M : \alpha}$$

直観主義述語論理 LJ の公理型は次の 2 つです。

$$(I) \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

$$(N) \quad \perp \rightarrow \alpha$$

直観主義述語論理 LJ の推論規則は次の 6 つです。

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (w \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (c \rightarrow)$$

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (e \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (\supset \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$

体系 $\lambda\alpha$ の公理型は次の 1 つです:

$$(\rho) \quad M = M.$$

体系 $\lambda\alpha$ の推論規則は次の 2 つです (規則 α は $x \equiv y$ の時も使える):

$$\frac{M = U \quad N = V}{MN = UV} (\tau), \quad \frac{[z/x]M = [z/y]N}{\lambda x.M = \lambda y.N} (\alpha) \text{ (ただし } z \notin V((\lambda x.M)(\lambda y.N)) \text{)}$$