

情報数理学特論VII 試験 2

2005 年 10 月 25 日 (火)

1. 直観主義述語論理の体系 NJ における,
論理式 $\forall x \neg \neg px \supset \forall x (\neg px \supset q)$ の証明図をえがけ。
2. 直観主義述語論理の体系 NJ における,
論理式 $\forall y (\forall x (\neg pxx \supset pxy) \supset \forall x (pxy \supset \neg pxx) \supset pyy)$ の証明図をえがけ。
3. 直観主義述語論理の体系 NJ における,
論理式 $\forall x ((px \supset q) \supset q) \supset \neg q \supset \forall x \neg \neg px$ の証明図をえがけ。
4. 直観主義述語論理 HJ の演繹定理 「 $x : \alpha, \Gamma \vdash_{HJ} M : \beta$ かつ Γ の主部に
変数 x が現れないならば $\Gamma \vdash_{HJ} \lambda^*x.M : \alpha \supset \beta$ である」を $\lambda^*x.M$ の定義
による帰納法で証明せよ。

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。
直観主義述語論理 HJ の公理型は次の 5 つです。

$$\begin{aligned} K &: \alpha \supset \beta \supset \alpha \\ S &: (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\ A &: \perp \supset \alpha \\ F &: \forall x \alpha \supset [t/x]\alpha \\ G &: \forall x(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \forall x \beta \end{aligned}$$

直観主義述語論理 HJ の推論規則は次の MP と普遍化規則です。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{(MN) : \beta} .$$

$$\frac{M : \alpha}{JM : \forall x \alpha}$$

直観主義述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \quad \frac{\begin{array}{c} x : \alpha \\ \Pi \\ M : \beta \end{array}}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \perp}{AM : \alpha} \quad \frac{M : \alpha}{JM : \forall x \alpha} \quad \frac{M : \forall x \alpha}{FM : [t/x]\alpha}$$

定義 0.1 (抽象) M を CL-項, x を変数とする. 変数 x を含まない項 $(\lambda^*x.M)$ を以下のように帰納的に定義する.

1. $(\lambda^*x.M) \equiv (KM)$ ($x \notin FV(M)$ のとき),
2. $(\lambda^*x.x) \equiv I$ (ただし $I \equiv SKK$),
3. $(\lambda^*x.JU) \equiv G(J(\lambda^*x.U))$,
4. $(\lambda^*x.UV) \equiv S(\lambda^*x.U)(\lambda^*x.V)$.