

情報数学 I 試験 4

2002 年 6 月 25 日 (火)

1. 論理式 $((q_0 \supset q_0) \supset p) \supset (q \supset r) \supset (r \supset q) \supset r$ が体系 HK で証明できないことを示せ.
2. 命題論理の体系 LJ の基本定理 (cut 除去定理) を命題論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ.
3. 体系 NJ, HJ はともに命題論理の体系とする。 $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$ ならば $\Gamma \vdash_{HJ} \gamma$ であることを HJ の演繹定理を使って証明せよ.
4. 次の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また、必要最小限の α -変換をすること。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\alpha \supset \beta \supset \gamma \quad \frac{\frac{\gamma}{\alpha \supset \gamma} \quad 1}{\beta \supset \alpha \supset \gamma} \quad 2}{\alpha \supset \gamma} \quad 1}{\beta \supset \gamma} \quad 2}{\beta \supset \gamma} \quad 2}{\alpha \supset \gamma} \quad 1}{\alpha \supset \gamma} \quad 1}{\gamma} \quad 1
 \end{array}$$

5. 論理式 $((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \neg\neg\alpha$ の NJ の証明図をえがけ.

注意: これは試験終了後に回収しますので、書き込みなどはしないで下さい。

直観主義命題論理の体系 HJ の公理型は次の 5 つです。

$$\begin{aligned} (B) \quad & (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\ (C) \quad & (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma \\ (K) \quad & \alpha \supset \beta \supset \alpha \\ (W) \quad & (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta \\ (N) \quad & \perp \supset \alpha \end{aligned}$$

古典命題論理の体系 HK の公理型は HJ の 5 つの公理型と次の L3 の 6 つです。

$$(L3) \quad ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha$$

直観主義命題論理の体系 LJ の公理型は次の 2 つです。

$$\begin{aligned} (I) \quad & \alpha \rightarrow \alpha \\ (N) \quad & \perp \rightarrow \end{aligned}$$

直観主義命題論理の体系 LJ の推論規則は次の 7 つです。

構造に関する推論規則

割増 (weakening)

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \gamma} (\rightarrow w)$$

縮約 (contraction)

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (c \rightarrow)$$

交換 (exchanging)

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (e \rightarrow)$$

切断 (cut)

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta} (cut)$$

論理記号に関する推論規則

\supset に関する規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \Theta}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta} (\supset \rightarrow) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$

これら全ての推論規則において Θ は一つの論理式からなるか空列かである。