

情報数理学特論 VII 試験 3

2005 年 11 月 8 日 (火)

1. 論理式 $((r \supset p) \supset p) \supset (q \supset r) \supset (r \supset q) \supset r$ が古典命題論理の体系 HK で証明できないことを示せ。
2. 直観主義述語論理の体系 NJ における,
論理式 $\forall x((px \supset q) \supset q) \supset (\neg\neg\forall x\neg\neg px \supset q) \supset \neg\neg q$ の証明図をえがけ。
3. 直観主義述語論理の体系 NJ における,
論理式 $\forall y(\forall x(\neg pxx \supset pxy) \supset \forall x(pxy \supset \neg pxx) \supset pyy)$ の証明図をえがけ。
4. 次の(省略形の)推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また, 必要最小限の α -変換をすること。

$$\frac{\frac{\frac{y : \alpha \supset \beta}{\beta \supset \alpha \supset \beta} \lambda x}{(\alpha \supset \beta) \supset \beta \supset \alpha \supset \beta} \lambda y \quad z : \alpha \supset \beta}{\beta \supset (\alpha \supset \beta)} \quad u : \beta$$

$$\frac{\frac{\frac{\alpha \supset \beta}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta} \lambda z}{\beta \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta} \lambda u \quad z : \beta}{(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}$$

5. 述語論理の体系 LJ の基本定理を述語論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。(体系 NJ の正規な証明図の長さに関する帰納法によるが, 長さが 1 のとき, 最後に使われた規則が導入規則のときは省略してよい。最後に使われている規則が消去規則のときだけを書けばよい。)

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。
直観主義述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \quad \frac{x : \alpha \quad \Pi \quad M : \beta}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \perp}{AM : \alpha} \quad \frac{M : \alpha}{JM : \forall x \alpha} \quad \frac{M : \forall x \alpha}{FM : [t/x]\alpha}$$

直観主義述語論理 LJ の公理型は次の 2 つです。

$$(I) \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

$$(N) \quad \perp \rightarrow \alpha$$

直観主義述語論理 LJ の推論規則は次の 8 つです。

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (w \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (c \rightarrow)$$

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (e \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (\supset \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$

$$\frac{[t/x]\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\forall x \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (\forall \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha}{\Gamma \rightarrow \forall x \alpha} (\rightarrow \forall)$$