

情報数理学特論 VII 試験 4

2005 年 11 月 22 日 (火)

1. 論理式 $\forall x((px \supset q) \supset q) \supset (\neg\neg\forall x \neg\neg px \supset q) \supset \neg\neg q$ が直観主義述語論理の体系 NJ で証明できることを示せ.
2. 論理式 $\forall x(px \supset q) \supset \exists x px \supset \neg\neg q$ が直観主義述語論理の体系 NJ で証明できることを示せ.
3. 次の推件式が体系 LK で証明できないことを示せ:

$$\forall x\forall y\forall z(rxy \supset ryz \supset rxz), \forall x\exists y rxy \rightarrow \exists x rxx.$$

4. 次の推件式が体系 LK で証明できないことを示せ:

$$\forall x rxx \rightarrow \forall x\forall y\forall z(rxy \supset rxz \supset \neg ryz \supset rzy).$$

5. 述語論理の体系 LJ の基本定理を述語論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。(体系 NJ の正規な証明図の長さに関する帰納法によるが, 長さが 1 のとき, 最後に使われた規則が導入規則のときは省略してよい。最後に使われている規則が消去規則のときだけを書けばよい。)

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。

- $\neg\alpha$ は $\alpha \supset \perp$ を
- $\exists x \alpha$ は $\neg\forall x\neg\alpha$ を

それぞれ略して書いたものとします。

直観主義述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \quad \frac{x : \alpha}{\Pi} \frac{M : \beta}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \perp}{AM : \alpha} \quad \frac{M : \alpha}{JM : \forall x\alpha} \quad \frac{M : \forall x\alpha}{FM : [t/x]\alpha}$$

直観主義述語論理 LJ の公理型は次の 2 つです。

$$(I) \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

$$(N) \quad \perp \rightarrow \alpha$$

直観主義述語論理 LJ の推論規則は次の 8 つです。

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (w \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (c \rightarrow)$$

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (e \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (\supset \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$

$$\frac{[t/x]\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\forall x \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (\forall \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha}{\Gamma \rightarrow \forall x \alpha} (\rightarrow \forall)$$

定義 0.1 (構造 (structure)) 言語 \mathcal{L} の構造 \mathcal{A} は次の 3 つのものから構成されています:

1. \mathcal{A} の世界と呼ばれる空でない集合 $|\mathcal{A}|$. $|\mathcal{A}|$ の元を \mathcal{A} の個体といいます.
2. 言語 \mathcal{L} の各々の n 変数関数記号 f に対して, $|\mathcal{A}|$ から $|\mathcal{A}|$ への n 変数関数 $f_{\mathcal{A}}$. (とくに, 0 変数関数記号 e に対して, $e_{\mathcal{A}}$ は \mathcal{A} の個体です.)
3. 言語 \mathcal{L} の各々の n 変数述語記号 p に対して, $|\mathcal{A}|$ の n 個の直積 $|\mathcal{A}|^n$ の部分集合 $p_{\mathcal{A}}$.

言語 \mathcal{L} に \mathcal{A} の個体の全ての名前を付け加えて得られる言語を $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ と書きます. 個体 c の名前を \bar{c} と書きます.

t を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします. 次に \mathcal{A} の個体 $\mathcal{A}(t)$ を帰納的に定義します.

1. $\mathcal{A}(\bar{c}) = c$,
2. $\mathcal{A}(ft_1 \dots t_n) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_n))$.

α を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉論理式とします. 次に α の真偽値 $\mathcal{A}(\alpha)$ を帰納的に定義します.

定義 0.2

1. $\mathcal{A}(pt_1 \dots t_n) = \top \iff p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_n))$,
2. $\mathcal{A}(\perp) = \perp$,
3. $\mathcal{A}(\alpha \supset \beta) = \mathcal{A}(\alpha) \supset \mathcal{A}(\beta)$,
4. $\mathcal{A}(\forall x \alpha) = \top \iff$ 任意の \mathcal{A} の個体 c に対して $\mathcal{A}([\bar{c}/x]\alpha) = \top$.