情報数理学特論VII 試験 7

2006 年 1 月 24 日 (火)

1. 述語論理の体系 LJ の基本定理を述語論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。(体系 NJ の正規な証明図の長さに関する帰納法によるが, 長さが 1 のとき, 最後に使われた規則が導入規則のときは省略してよい。最後に使われている規則が消去規則のときだけを書けばよい。)

2. 任意のラムダ項 M にたいして, $\mathsf{Y}(\lambda xyz.M)$ が x についての次の方程式の解であることを示せ:

$$xyz =_\beta M \quad .$$

3. $\overline{\zeta}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{\pi}$ を次の関係を満たしている閉ラムダ項とする:

$$\overline{\zeta}\,\overline{0} =_\beta \lambda xy.x, \quad \overline{\zeta}\,\overline{n} =_\beta \lambda xy.y \ (n \geq 1),$$

$$\overline{\sigma}\,\overline{n} =_\beta \overline{n+1}, \quad \overline{\pi}\,\overline{n} =_\beta \overline{n-1} \ (n \geq 1).$$

不動点結合子 Y および 上記の閉ラムダ項 $\overline{\zeta}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{\pi}$, (2 変数関数) 和を表す閉ラムダ項 $\overline{add}$ と (2 変数関数) 積を表す閉ラムダ項 $\overline{mul}$ を使って (2 変数関数) べき乗 (x^y) を表す閉ラムダ項 $\overline{pow}$ を表せ.

4. numeral $\overline{n}$ を次のように帰納的に定義する (ここで $\perp \equiv \lambda xy.y$ である):

$$\overline{0} \equiv \perp, \quad \overline{n+1} \equiv \lambda x.x\perp\overline{n}.$$

このとき, 問題 3 にある閉ラムダ項 $\overline{\zeta}$,$\overline{\sigma}$,$\overline{\pi}$ を定義し, 問題 3 に書かれている性質を満たすことを示せ (前回の問題とは少し異なっていることに注意).

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。

直観主義述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{M:\alpha\supset\beta \quad N:\alpha}{MN:\beta} \qquad \frac{\begin{matrix} x:\alpha \\ \Pi \\ M:\beta \end{matrix}}{\lambda x.M:\alpha\supset\beta}$$

$$\frac{M:\bot}{\mathsf{A}M:\alpha} \qquad \frac{M:\alpha}{\mathsf{J}M:\forall x\alpha} \qquad \frac{M:\forall x\alpha}{\mathsf{F}M:[t/x]\alpha}$$

直観主義述語論理 LJ の公理型は次の 2 つです.

$$\begin{array}{cccc} (I) & \alpha & \to & \alpha \\ (N) & \bot & \to & \alpha \end{array}$$

直観主義述語論理 LJ の推論規則は次の 8 つです。

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma\to\gamma}{\alpha,\Gamma\to\gamma}\ (w\to), \qquad \frac{\alpha,\alpha,\Gamma\to\gamma}{\alpha,\Gamma\to\gamma}\ (c\to)$$

$$\frac{\Delta,\alpha,\beta,\Gamma\to\gamma}{\Delta,\beta,\alpha,\Gamma\to\gamma}\ (e\to), \qquad \frac{\Gamma\to\alpha \quad \alpha,\Delta\to\gamma}{\Gamma,\Delta\to\gamma}\ (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma\to\alpha \quad \beta,\Delta\to\gamma}{\alpha\supset\beta,\Gamma,\Delta\to\gamma}\ (\supset\to), \qquad \frac{\alpha,\Gamma\to\beta}{\Gamma\to\alpha\supset\beta}\ (\to\supset)$$

$$\frac{[t/x]\alpha,\Gamma\to\gamma}{\forall x\alpha,\Gamma\to\gamma}\ (\forall\to), \qquad \frac{\Gamma\to\alpha}{\Gamma\to\forall x\alpha}\ (\to\forall)$$

不動点結合子 Y は次の式を満たす:

$$\mathsf{Y}x =_\beta x(\mathsf{Y}x) \quad .$$