情報数学I 試験 3

2006 年 5 月 30 日 (火)

1. (a) $\vdash_{NJ} ((\alpha \supset \beta) \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\gamma$ を示せ (すなわち, 式 $M : ((\alpha \supset \beta) \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\gamma$ が NJ で証明可能となる閉項 M を見つけ, その式の証明図をえがく)。

   (b) $\vdash_{NJ} \lambda xy.y(\lambda z.\mathsf{A}(xz(\lambda z.y(\lambda y.z)))) : (\alpha \supset \neg\neg\beta) \supset \neg\neg(\alpha \supset \beta)$ を示せ。

   (c) $\vdash_{NJ} \neg\neg\neg\alpha \supset \neg\alpha$ を示せ。

   (d) $\vdash_{NJ} \neg\neg(\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\alpha \supset \neg\neg\gamma$ を示せ。

2. 上の 1c, 1d で求めた閉ラムダ項をそれぞれ U, V とする。M を定数 D を含むかも知れないラムダ項とする。D を含まないラムダ項 M^j を以下のように帰納的に定義する。

   (a) $x^j \equiv \lambda y.yx$,

   (b) $(\mathsf{D}N)^j \equiv UN^j$,

   (c) $(\mathsf{A}N)^j \equiv (\lambda x.\mathsf{A}(x(\lambda x.x)))N^j$,

   (d) $(NR)^j \equiv VN^jR^j$,

   (e) $(\lambda x.N)^j \equiv (\lambda xy.y(\lambda z.\mathsf{A}(xz(\lambda z.y(\lambda y.z)))))(\lambda x.N^j)$.

   このとき, $\Gamma \vdash_{NK} M : \gamma$ ならば $\Gamma \vdash_{NJ} M^j : \neg\neg\gamma$ であることをラムダ項 M の長さについての帰納法で証明せよ。(体系 NK の定義は次ページにある。)

3. $(\lambda xyz.xz(yz))(\lambda x.xz) \equiv_\alpha (\lambda yzx.yx(zx))(\lambda y.yz)$ を示す体系 $\lambda\alpha$ の証明図をえがけ。

4. $Z \equiv \lambda zx.x(zzx)$, $\mathsf{Y} \equiv ZZ$ とする。このとき $\mathsf{Y}x \rhd_\beta x(\mathsf{Y}x)$ であることを示せ ($\vdash_{\lambda\beta} \mathsf{Y}x \rhd x(\mathsf{Y}x)$ を示す証明図はえがかなくてもよい)。

直観主義命題論理 (intuitionistic propositional logic) NJ の推論規則は次の 3 つである:

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \quad , \qquad \frac{\begin{array}{c} x : \alpha \\ \Pi \\ M : \beta \end{array}}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta} \quad , \qquad \frac{M : \bot}{\mathsf{A}M : \alpha} \quad .$$

古典命題論理 NK は体系 NJ に次の二重否定の除去規則を付け加えたものである:

$$\frac{M : \neg\neg\alpha}{\mathsf{D}M : \alpha} \quad .$$

定義 0.1 (代入 (substitution)) M, N をラムダ項, x を変数とする. M の中の (自由に現れる) x に N を代入した結果 $[N/x]M$ を次のように帰納的に定義する.

1. $[N/x]x \equiv N$,
2. $[N/x]M \equiv M \quad (x \notin FV(M)$ のとき),
3. $[N/x](QR) \equiv ([N/x]Q\ [N/x]R) \quad (x \in FV(QR)$ のとき),
4. $[N/x](\lambda y.Q) \equiv \lambda y.[N/x]Q \quad (x \in FV(Q)$ かつ $y \notin FV(N)$ のとき),
5. $[N/x](\lambda y.Q) \equiv \lambda z.[N/x][z/y]Q \quad (x \in FV(Q)$ かつ $y \in FV(N)$ のとき).

ここで $y \not\equiv x$ は仮定されている. また, z は $V(N(\lambda y.Q))$ の中にはない最初の変数である (変数は 'u_0', 'u_1', 'u_2',... の順に並べられています).

体系 $\lambda\alpha$ の公理型は次の 1 つです:

$$(\rho) \quad M \quad = \quad M.$$

体系 $\lambda\alpha$ の推論規則は次の 2 つです (規則 α は $x \equiv y$ の時も使える):

$$\frac{M = U \quad N = V}{MN = UV}\ (\tau), \qquad \frac{[z/x]M = [z/y]N}{\lambda x.M = \lambda y.N}\ (\alpha)\ (\text{ただし } z \notin V((\lambda x.M)(\lambda y.N))).$$

体系 $\lambda\beta$ の公理型は次の 2 つです:

$$\begin{array}{llll} (\beta) & (\lambda x.M)N & \rhd_1 & [N/x]M, \\ (\rho) & M & \rhd & N \qquad (\text{ただし } M \equiv_\alpha N). \end{array}$$

体系 $\lambda\beta$ の推論規則は次の 7 つです:

$$\frac{N \rhd_1 R}{MN \rhd_1 MR}\ (\mu), \qquad \frac{M \rhd_1 N}{MR \rhd_1 NR}\ (\nu),$$

$$\frac{M \rhd_1 N}{R \rhd_1 N}\ (\kappa 1)\ \ (\text{ただし } R \equiv_\alpha M), \qquad \frac{M \rhd_1 N \quad N \rhd R}{M \rhd R}\ (\tau),$$

$$\frac{M \rhd N}{M = N}\ (\kappa), \qquad \frac{M = N}{N = M}\ (\sigma), \qquad \frac{M = N \quad N = R}{M = R}\ (\tau =).$$