情報数学 I 試験 4

2006 年 6 月 13 日 (火)

1. 演繹定理を証明せよ。

2. (a) $\vdash_{NJ}$ $((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \neg\neg\alpha$ を示せ (すなわち, 式 $M : ((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \neg\neg\alpha$ が NJ で証明可能となる閉項 M を見つけ, その式の証明図をえがく)。
   (b) $\vdash_{NJ}$ $(\alpha \supset \neg\neg\beta) \supset \neg\neg(\alpha \supset \beta)$ を示せ。
   (c) $\vdash_{NJ}$ $\neg\neg\neg\neg\alpha \supset \neg\neg\alpha$ を示せ。
   (d) $\vdash_{NJ}$ $\neg\neg(\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\alpha \supset \neg\neg\gamma$ を示せ。

3. 上の 2b, 2c, 2d で求めた閉ラムダ項をそれぞれ T, U, V とする。
   また, $\Gamma \vdash_{NK} M : \gamma$ とする。定数 D を含むかも知れないラムダ項 M に対して, D を含まないラムダ項 M^j を以下のように帰納的に定義する。
   (a) $x^j \equiv \lambda y.yx$,
   (b) $(\mathsf{D}N)^j \equiv UN^j$,
   (c) $(\mathsf{A}N)^j \equiv (\lambda x.\mathsf{A}(x(\lambda x.x)))N^j$,
   (d) $(NR)^j \equiv VN^jR^j$,
   (e) $(\lambda x.N)^j \equiv T(\lambda x.N^j)$.

   このとき, $\Gamma \vdash_{NJ} M^j : \neg\neg\gamma$ であることをラムダ項 M^j の定義についての帰納法で証明せよ。(体系 NK の定義は次ページにある。)

4. $V \equiv \lambda y.x(yy)$, $\mathsf{Y} \equiv \lambda x.VV$ とする。このとき $\mathsf{Y}x =_\beta x(\mathsf{Y}x)$ であることを示せ ($\vdash_{\lambda\beta}$ $\mathsf{Y}x = x(\mathsf{Y}x)$ を示す証明図はえがかなくてもよい)。

古典命題論理 (classical propositional logic) HK の公理型は次の 4 つである:

$$\begin{aligned}&\mathsf{K} : \alpha \supset \beta \supset \alpha\\&\mathsf{S} : (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma\\&\mathsf{P} : ((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha\\&\mathsf{A} : \bot \supset \alpha\end{aligned}$$

直観主義命題論理 (intuitionistic propositional logic) NJ の推論規則は次の 3 つである:

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta}\ ,\qquad \frac{\begin{array}{c}x : \alpha\\ \Pi\\ M : \beta\end{array}}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}\ ,\qquad \frac{M : \bot}{\mathsf{A}M : \alpha}\ .$$

古典命題論理 NK は体系 NJ に次の二重否定の除去規則を付け加えたものである:

$$\frac{M : \neg\neg\alpha}{\mathsf{D}M : \alpha}\ .$$

定義 0.1 (抽象) M を CL-項, x を変数とする. 変数 x を含まない項 $(\lambda^* x.M)$ を以下のように帰納的に定義する.

1. $(\lambda^* x.M) \equiv (\mathsf{K}M)$ $\quad$ ($x \notin FV(M)$ のとき),

2. $(\lambda^* x.x) \equiv \mathsf{I}$ $\quad$ (ただし $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$),

3. $(\lambda^* x.UV) \equiv \mathsf{S}(\lambda^* x.U)(\lambda^* x.V)$ $\quad$ ($x \in FV(UV)$ のとき).

定理 0.2 (演繹定理) $x : \alpha, \Gamma \vdash_{HK} M : \beta$ かつ Γ に変数 x が現れないならば $\Gamma \vdash_{HK} \lambda^* x.M : \alpha \supset \beta$ である.