

情報数学 I 試験 5

2005 年 7 月 4 日 (火)

1. $V \equiv \lambda y.x(yy)$, $Y \equiv \lambda x.VV$ とする。このとき $Yx =_{\beta} x(Yx)$ であることを示せ ($\vdash_{\lambda\beta} Yx = x(Yx)$ を示す証明図はえがなくてもよい)。
2. 次の省略形の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また、必要最小限の α -変換をすること。正規形については省略形でないものをえがけ。

$$\begin{array}{c}
 \frac{z : \alpha \supset \beta \supset \gamma \quad x : \alpha}{\beta \supset \gamma} \quad y : \beta \\
 \frac{\frac{\frac{\gamma}{\alpha \supset \gamma} \quad \lambda x}{\beta \supset \alpha \supset \gamma} \quad \lambda y \quad \frac{y : \alpha \supset \beta \quad x : \alpha}{\beta}}{\alpha \supset \gamma} \quad x : \alpha}{\gamma}
 \end{array}$$

3. 論理式 $((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \neg\neg\alpha$ が体系 LJ で証明可能であることを示せ。
4. 命題論理の体系 LJ の基本定理を命題論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。
5. 論理式 $((r \supset p) \supset p) \supset (q \supset r) \supset (r \supset q) \supset r$ が古典命題論理の体系 HK で証明できないことを示せ。

直観主義命題論理 NJ の推論規則は次の 3 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta}, \quad \frac{x : \alpha \quad \Pi M : \beta}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \perp}{\Lambda M : \alpha}$$

直観主義述語論理 LJ の公理型は次の 2 つです。

$$(I) \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

$$(N) \quad \perp \rightarrow \alpha$$

直観主義述語論理 LJ の推論規則は次の 6 つです。

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (w \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (c \rightarrow)$$

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (e \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (\supset \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$