

情報数学 I 試験 5

2002 年 7 月 16 日 (火)

1. 論理式 $\neg\neg(((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha)$ の命題論理の体系 NJ の証明図をえがけ。
2. 次の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また、必要最小限の α -変換をすること。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\beta \supset \gamma}{2} \supset \gamma}{\alpha \supset \gamma} 1}{((\beta \supset \gamma) \supset \gamma) \supset \alpha \supset \gamma} 2 \quad \frac{\frac{\frac{\alpha \supset \beta \supset \gamma}{3} \supset \gamma}{\beta \supset \gamma} 1}{\beta \supset \gamma} 1}{\frac{\beta \supset \gamma}{\gamma}} 2 \quad \frac{\beta \supset \gamma}{\gamma} 1}{(\beta \supset \gamma) \supset \gamma} 2 \\
 \hline
 \alpha \supset \gamma
 \end{array}
 \end{array}$$

3. 体系 NJ, HJ はともに述語論理の体系とする。 $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$ ならば $\Gamma \vdash_{HJ} \gamma$ であることを証明せよ。(述語論理 HJ の演繹定理を使ってよい。)
4. 述語論理の体系 LJ の基本定理を述語論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。(体系 NJ の正規な証明図の長さに関する帰納法によるが、長さが 1 のとき、最後に使われた規則が導入規則のときは省略してよい。最後に使われている規則が消去規則のときだけを書けばよい。)
5. 論理式 $\forall y(\forall x(\neg pxx \supset pxy) \supset \forall x(pxy \supset \neg pxx) \supset pyy)$ の述語論理の体系 NJ の証明図をえがけ。

注意: 以下では, 変数条件 (... に変数 x が自由には現れない) は省略されている。また, LJ の体系は教科書とは少し異なっている (右辺は空ということではなく, ちょうど一つの論理式)。

直観主義述語論理 HJ の公理型は次の 7 つです。

$$\begin{aligned}
 (B) \quad & (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\
 (C) \quad & (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma \\
 (K) \quad & \alpha \supset \beta \supset \alpha \\
 (W) \quad & (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta \\
 (N) \quad & \perp \supset \alpha \\
 (F1) \quad & \forall x \alpha \supset [t/x]\alpha \\
 (F2) \quad & \forall x (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \forall x \beta
 \end{aligned}$$

直観主義述語論理 HJ の推論規則は次の MP と普遍化規則の 2 つです。

$$\frac{\alpha \supset \beta \quad \alpha}{\beta}, \quad \frac{\alpha}{\forall x \alpha}$$

述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\alpha \supset \beta \quad \beta} (\supset\text{-E}), \quad \frac{\frac{k}{\alpha} \quad \Pi}{\beta} k(\supset\text{-I}) \\
 & \frac{\Pi}{\perp} (\perp\text{-E}), \quad \frac{\Pi}{\forall x \alpha} (\forall\text{-I}), \quad \frac{\Pi}{[t/x]\alpha} (\forall\text{-E})
 \end{aligned}$$

直観主義述語論理 LJ の公理型は次の 2 つです。

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & \alpha \rightarrow \alpha \\
 (N) \quad & \perp \rightarrow \alpha
 \end{aligned}$$

直観主義述語論理 LJ の推論規則は次の 8 つです。

構造に関する推論規則

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (w \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (c \rightarrow) \\
 & \frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (e \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (cut)
 \end{aligned}$$

論理記号に関する推論規則

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (\supset \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset) \\
 & \frac{[t/x]\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\forall x \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (\forall \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Theta, \forall x \alpha} (\rightarrow \forall)
 \end{aligned}$$