

## 情報数学 I 試験 6

2006 年 7 月 18 日 (火)

1. 次の省略形の推論図の正規形をもとめよ。途中経過も書くこと。また、必要最小限の  $\alpha$ -変換をすること。

$$\frac{\frac{\frac{x : (\beta \supset \gamma) \supset \delta \supset \gamma}{\delta \supset \gamma} \lambda y}{\alpha \supset \delta \supset \gamma} \lambda x}{((\beta \supset \gamma) \supset \delta \supset \gamma) \supset \alpha \supset \delta \supset \gamma} \lambda x \quad \frac{\frac{\frac{z : \alpha \supset \beta \supset \gamma \quad y : \alpha}{\beta \supset \gamma}}{x : \beta \supset \gamma \quad y : \beta} \lambda z}{\delta \supset \gamma} \lambda z}{(\beta \supset \gamma) \supset \delta \supset \gamma} \lambda x}{\alpha \supset \delta \supset \gamma}$$

2. (a) 推件式  $(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$  が体系 LJ で証明可能であることを示せ。  
 (b) 推件式  $(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \rightarrow \alpha$  に至る体系 LK の cut なしの証明図を書け。
3. (a) 推件式  $\alpha \supset \gamma, (\alpha \supset \beta) \supset \gamma \rightarrow \neg\neg\gamma$  が体系 LJ で証明可能であることを示せ。  
 (b) 推件式  $\alpha \supset \gamma, (\alpha \supset \beta) \supset \gamma \rightarrow \gamma$  に至る体系 LK の cut なしの証明図を書け。
4. 命題論理の体系 LJ の基本定理を命題論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。
5. 推件式  $((q \supset p) \supset \neg q) \supset r \rightarrow r$  が古典論理の体系 LK で証明できるならば証明図を書き, 証明できないならばそのことを示せ。

直観主義命題論理 NJ の推論規則は次の 3 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta}, \quad \frac{\frac{x : \alpha}{\Pi} \quad M : \beta}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \perp}{\Lambda M : \alpha}$$

古典命題論理 LK の公理型は次の 2 つです。

$$(I) \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

$$(N) \quad \perp \rightarrow \alpha$$

古典命題論理 LK の cut 以外の推論規則は次の 8 つです。

構造に関する推論規則

割増 (weakening)

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha} (\rightarrow w)$$

縮約 (contraction)

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (c \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha} (\rightarrow c)$$

交換 (exchanging)

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (e \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha, \beta, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Theta, \beta, \alpha, \Lambda} (\rightarrow e)$$

論理記号に関する推論規則

$\supset$  に関する規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \Lambda}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda} (\supset \rightarrow) \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta, \beta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$