

情報数学特論 VII 試験 1

2006 年 10 月 17 日 (火)

- 次の推件式に至る古典命題論理の体系 LK の cut なしの証明図を書け。
 - $(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \rightarrow \alpha$
 - $\alpha \supset \gamma, (\alpha \supset \beta) \supset \gamma \rightarrow \gamma$
- 直観主義述語論理の体系 NJ における, 次の論理式の証明図をえがけ。
 - $\forall x \neg \neg px \supset \forall x (\neg px \supset q)$
 - $\forall y (\forall x (\neg pxx \supset pxy) \supset \forall x (pxy \supset \neg pxx) \supset pyy)$
- 古典述語論理の体系 LK における,
推件式 $\forall x ((px \supset q) \supset q), \neg q \rightarrow \forall x px$ の証明図をえがけ。
- 直観主義述語論理 HJ の演繹定理 「 $x : \alpha, \Gamma \vdash_{HJ} M : \beta$ かつ Γ の主部に
変数 x が現れないならば $\Gamma \vdash_{HJ} \lambda^*x.M : \alpha \supset \beta$ である」を $\lambda^*x.M$ の定義
による帰納法で証明せよ。

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。
直観主義述語論理 HJ の公理型は次の 5 つです。

$$\begin{aligned} K &: \alpha \supset \beta \supset \alpha \\ S &: (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\ A &: \perp \supset \alpha \\ F &: \forall x \alpha \supset [t/x]\alpha \\ G &: \forall x (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \forall x \beta \end{aligned}$$

直観主義述語論理 HJ の推論規則は次の MP と普遍化規則です。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{(MN) : \beta} .$$
$$\frac{M : \alpha}{JM : \forall x \alpha}$$

直観主義述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \quad \frac{x : \alpha \quad \Pi \quad M : \beta}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \perp}{AM : \alpha} \quad \frac{M : \alpha}{JM : \forall x \alpha} \quad \frac{M : \forall x \alpha}{FM : [t/x]\alpha}$$

定義 0.1 (抽象) M を CL-項, x を変数とする. 変数 x を含まない項 $(\lambda^*x.M)$ を以下のように帰納的に定義する.

1. $(\lambda^*x.M) \equiv (KM)$ ($x \notin FV(M)$ のとき),
2. $(\lambda^*x.x) \equiv I$ (ただし $I \equiv SKK$),
3. $(\lambda^*x.JU) \equiv G(J(\lambda^*x.U))$,
4. $(\lambda^*x.UV) \equiv S(\lambda^*x.U)(\lambda^*x.V)$.

ゲンツェン流の古典述語論理 LK の公理型は次の 2 つです.

$$(I) \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

$$(N) \quad \perp \rightarrow \Theta$$

ゲンツェン流の古典述語論理 LK の cut 以外の推論規則は次の 10 個です.

構造に関する推論規則

割増 (weakening)

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha} (\rightarrow w)$$

縮約 (contraction)

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (c \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha} (\rightarrow c)$$

交換 (exchanging)

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (e \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha, \beta, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Theta, \beta, \alpha, \Lambda} (\rightarrow e)$$

論理記号に関する推論規則

\supset に関する規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \Lambda}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda} (\supset \rightarrow) \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta, \beta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$

\forall に関する規則

$$\frac{[t/x]\alpha, \Gamma \rightarrow \Theta}{\forall x \alpha, \Gamma \rightarrow \Theta} (\forall \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Theta, \forall x \alpha} (\rightarrow \forall)$$