# 情報数理学特論VII 試験 3

2006 年 11 月 14 日 (火)

1. 論理式 $\forall x((px \supset q) \supset q) \supset (\forall x\, px \supset q) \supset q$ が古典述語論理の体系 NK で証明できることを示せ。

2. 次の推件式が体系 LK で証明できないことを示せ:

$$\forall x\, rxx \to \forall x \forall y \forall z(rxy \supset rxz \supset \neg ryz \supset rzy).$$

3. 次の推件式が体系 LK で証明できないことを示せ:

$$\forall x \forall y \forall z(rxy \supset ryz \supset rxz), \forall x \exists y\, rxy \to \exists x\, rxx.$$

4. 次を証明せよ:

$$\mathcal{A}(\exists x \alpha) = \top \iff \text{ある } \mathcal{A} \text{ の個体 } c \text{ が存在して } \mathcal{A}([\bar{c}/x]\alpha) = \top.$$

5. 述語論理の体系 LJ の基本定理を述語論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。(体系 NJ の正規な証明図の長さに関する帰納法によるが, 長さが 1 のとき, 最後に使われた規則が導入規則のときは省略してよい。最後に使われている規則が消去規則のときだけを書けばよい。)

**注意:** 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。

- $\neg\alpha$ は $\alpha \supset \bot$ を
- $\exists x\ \alpha$ は $\neg\forall x \neg\alpha$ を

それぞれ略して書いたものとします.

**古典述語論理 NK** の推論規則は次の 6 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \qquad \frac{\begin{matrix} x : \alpha \\ \Pi \\ M : \beta \end{matrix}}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta} \qquad \frac{M : \bot}{\mathsf{A}M : \alpha}$$

$$\frac{M : \alpha}{\mathsf{J}M : \forall x\alpha} \qquad \frac{M : \forall x\alpha}{\mathsf{F}M : [t/x]\alpha} \qquad \frac{M : \neg\neg\alpha}{\mathsf{D}M : \alpha} \quad .$$

**直観主義述語論理 LJ** の公理型は次の 2 つです.

$$
\begin{array}{cccc}
(I) & \alpha & \rightarrow & \alpha \\
(N) & \perp & \rightarrow & \alpha
\end{array}
$$

**直観主義述語論理 LJ** の推論規則は次の 8 つです。

**構造に関する推論規則**

$$
\frac{\Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}\ (w \rightarrow), \qquad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}\ (c \rightarrow)
$$

$$
\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}\ (e \rightarrow), \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \Delta \rightarrow \gamma}\ (cut)
$$

**論理記号に関する推論規則**

$$
\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \gamma}\ (\supset \rightarrow), \qquad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta}\ (\rightarrow \supset)
$$

$$
\frac{[t/x]\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\forall x\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}\ (\forall \rightarrow), \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha}{\Gamma \rightarrow \forall x\alpha}\ (\rightarrow \forall)
$$

**定義 0.1 (構造 (structure))** 言語 $\mathcal{L}$ の構造 $\mathcal{A}$ は次の 3 つのものから構成されています:

1. $\mathcal{A}$ の世界と呼ばれる空でない集合 $|\mathcal{A}|$. $|\mathcal{A}|$ の元を $\mathcal{A}$ の個体といいます.
2. 言語 $\mathcal{L}$ の各々の $n$ 変数関数記号 $f$ に対して, $|\mathcal{A}|$ から $|\mathcal{A}|$ への $n$ 変数関数 $f_{\mathcal{A}}$. (とくに, 0 変数関数記号 $e$ に対して, $e_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の個体です.)
3. 言語 $\mathcal{L}$ の各々の $n$ 変数述語記号 $p$ に対して, $|\mathcal{A}|$ の $n$ 個の直積 $|\mathcal{A}|^n$ の部分集合 $p_{\mathcal{A}}$.

言語 $\mathcal{L}$ に $\mathcal{A}$ の個体の全ての名前を付け加えて得られる言語を $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ と書きます. 個体 $c$ の名前を $\bar{c}$ と書きます.

$t$ を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします. 次に $\mathcal{A}$ の個体 $\mathcal{A}(t)$ を帰納的に定義します.

1. $\mathcal{A}(\bar{c}) = c$,
2. $\mathcal{A}(ft_1...t_n) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), ..., \mathcal{A}(t_n))$.

$\alpha$ を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉論理式とします. 次に $\alpha$ の真偽値 $\mathcal{A}(\alpha)$ を帰納的に定義します.

**定義 0.2**

1. $\mathcal{A}(pt_1...t_n) = \top \iff p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), ..., \mathcal{A}(t_n))$,
2. $\mathcal{A}(\perp) = \perp$,
3. $\mathcal{A}(\alpha \supset \beta) = \mathcal{A}(\alpha) \supset \mathcal{A}(\beta)$,
4. $\mathcal{A}(\forall x\alpha) = \top \iff$ 任意の $\mathcal{A}$ の個体 $c$ に対して $\mathcal{A}([\bar{c}/x]\alpha) = \top$.