情報数理学特論 VII 試験 4

2006 年 11 月 28 日 (火)

1. 論理式 $\forall x(px \supset q) \supset \exists x\, px \supset \neg\neg q$ に至る古典述語論理の体系 NK の証明図をえがけ。

2. 論理式 $\forall x((px \supset q) \supset q) \supset (\forall x\, px \supset q) \supset q$ に至る古典述語論理の体系 NK の証明図をえがけ。

3. 次の推件式が体系 LK で証明できないことを示せ:

$$\forall x \forall y \forall z(rxy \supset ryz \supset rxz), \forall x\, rxx, \exists x \forall y\, rxy, \exists x \forall y\, ryx \to \forall x \forall y(\neg rxy \supset ryx).$$

4. 次の推件式が体系 LK で証明できないことを示せ:

$$\forall x \forall y \forall z(rxy \supset ryz \supset rxz), \forall x \forall y \exists z(rxy \supset (rxz \wedge rzy)) \to \exists x\, rxx.$$

5. 述語論理の体系 NJ の正規化定理を証明せよ。

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。

- $\neg\alpha$ は $\alpha \supset \bot$ を
- $\alpha \wedge \beta$ は $\neg(\alpha \supset \neg\beta)$ を
- $\exists x\ \alpha$ は $\neg\forall x \neg\alpha$ を

それぞれ略して書いたものとします.

古典述語論理 NK の推論規則は次の 6 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \qquad \frac{\begin{matrix} x : \alpha \\ \Pi \\ M : \beta \end{matrix}}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta} \qquad \frac{M : \bot}{\mathsf{A}M : \alpha}$$

$$\frac{M : \alpha}{\mathsf{J}M : \forall x\alpha} \qquad \frac{M : \forall x\alpha}{\mathsf{F}M : [t/x]\alpha} \qquad \frac{M : \neg\neg\alpha}{\mathsf{D}M : \alpha} \quad .$$

定理 0.1 (述語論理 NJ の正規化定理 (Normalization theorem for NJ)) NJ の推論図は何回かの βJ-変形を行なうことにより正規形にすることができる.

定義 0.2 (構造 (structure)) 言語 $\mathcal{L}$ の構造 $\mathcal{A}$ は次の 3 つのものから構成されています:

1. $\mathcal{A}$ の世界と呼ばれる空でない集合 $|\mathcal{A}|$. $|\mathcal{A}|$ の元を $\mathcal{A}$ の個体といいます.
2. 言語 $\mathcal{L}$ の各々の n 変数関数記号 f に対して, $|\mathcal{A}|$ から $|\mathcal{A}|$ への n 変数関数 $f_{\mathcal{A}}$. (とくに, 0 変数関数記号 e に対して, $e_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の個体です.)
3. 言語 $\mathcal{L}$ の各々の n 変数述語記号 p に対して, $|\mathcal{A}|$ の n 個の直積 $|\mathcal{A}|^n$ の部分集合 $p_{\mathcal{A}}$.

言語 $\mathcal{L}$ に $\mathcal{A}$ の個体の全ての名前を付け加えて得られる言語を $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ と書きます. 個体 c の名前を $\bar{c}$ と書きます.

t を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします. 次に $\mathcal{A}$ の個体 $\mathcal{A}(t)$ を帰納的に定義します.

1. $\mathcal{A}(\bar{c}) = c$,
2. $\mathcal{A}(ft_1...t_n) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), ..., \mathcal{A}(t_n))$.

α を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉論理式とします. 次に α の真偽値 $\mathcal{A}(\alpha)$ を帰納的に定義します.

定義 0.3

1. $\mathcal{A}(pt_1...t_n) = \top \iff p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), ..., \mathcal{A}(t_n))$,
2. $\mathcal{A}(\bot) = \bot$,
3. $\mathcal{A}(\alpha \supset \beta) = \mathcal{A}(\alpha) \supset \mathcal{A}(\beta)$,
4. $\mathcal{A}(\forall x\alpha) = \top \iff$ 任意の $\mathcal{A}$ の個体 c に対して $\mathcal{A}([\bar{c}/x]\alpha) = \top$.