

## 情報数理学特論 VII 試験 5

2006 年 12 月 12 日 (火)

1. 述語論理の体系 NJ の正規化定理を証明せよ。
2. 任意のラムダ項  $M$  にたいして,  $Y(\lambda xyz.M)$  が  $x$  についての次の方程式の解であることを示せ:

$$xyz =_{\beta} M .$$

3.  $\bar{\zeta}, \bar{\sigma}, \bar{\pi}$  を次の関係を満たしている閉ラムダ項とする:

$$\bar{\zeta} \bar{0} =_{\beta} \lambda xy.x, \quad \bar{\zeta} \bar{n} =_{\beta} \lambda xy.y \quad (n \geq 1),$$

$$\bar{\sigma} \bar{n} =_{\beta} \overline{n+1}, \quad \bar{\pi} \bar{n} =_{\beta} \overline{n-1} \quad (n \geq 1).$$

不動点結合子  $Y$  および 上記の閉ラムダ項  $\bar{\zeta}, \bar{\sigma}, \bar{\pi}$  と (2 変数関数) 和を表す閉ラムダ項  $\overline{add}$  を使って (2 変数関数) 積を表す閉ラムダ項  $\overline{mul}$  を表せ.

4. numeral  $\bar{n}$  を次のように帰納的に定義する (ここで  $\perp \equiv \lambda xy.y$  である):

$$\bar{0} \equiv \perp, \quad \overline{n+1} \equiv \lambda x.x \perp \bar{n}.$$

このとき, 問題 3 にある閉ラムダ項  $\bar{\zeta}, \bar{\sigma}, \bar{\pi}$  を定義し, 問題 3 に書かれている性質を満たすことを示せ。

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。

直観主義述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \quad \frac{x : \alpha \quad \Pi}{M : \beta} \quad \frac{}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \perp}{AM : \alpha} \quad \frac{M : \alpha}{JM : \forall x \alpha} \quad \frac{M : \forall x \alpha}{FM : [t/x] \alpha}$$

不動点結合子  $Y$  は次の式を満たす:

$$Yx =_{\beta} x(Yx) .$$