

情報数理学特論 VII 試験 6

2007 年 1 月 16 日 (火)

1. 述語論理の体系 LJ の基本定理を述語論理の体系 NJ の正規化定理を使って証明せよ。(体系 NJ の正規な証明図の長さに関する帰納法によるが、長さが 1 のとき、最後に使われた規則が導入規則のときは省略してよい。最後に使われている規則が消去規則のときだけを書けばよい。)
2. 任意のラムダ項 M にたいして、 x についての次の方程式が解をもつことを示せ:

$$xyz u =_{\beta} M .$$

3. $\bar{\zeta}, \bar{\sigma}, \bar{\pi}$ を次の関係を満たしている閉ラムダ項とする:

$$\bar{\zeta} \bar{0} =_{\beta} \lambda xy.x, \quad \bar{\zeta} \bar{n} =_{\beta} \lambda xy.y \quad (n \geq 1),$$

$$\bar{\sigma} \bar{n} =_{\beta} \overline{n+1}, \quad \bar{\pi} \bar{n} =_{\beta} \overline{n-1} \quad (n \geq 1).$$

不動点結合子 Y および 上記の閉ラムダ項 $\bar{\zeta}, \bar{\sigma}, \bar{\pi}$ と (2 変数関数) 和を表す閉ラムダ項 \overline{add} を使って (2 変数関数) 積を表す閉ラムダ項 \overline{mul} を表せ.

4. numeral \bar{n} を次のように帰納的に定義する (ここで $\perp \equiv \lambda xy.y$ である):

$$\bar{0} \equiv \lambda x.x, \quad \overline{n+1} \equiv \lambda x.x \perp \bar{n}.$$

このとき、問題 3 にある閉ラムダ項 $\bar{\zeta}, \bar{\sigma}, \bar{\pi}$ を定義し、問題 3 に書かれている性質を満たすことを示せ (前回の問題とは少し異なっていることに注意).

注意: 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。
直観主義述語論理 NJ の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \quad \frac{x : \alpha \quad \Pi M : \beta}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \perp}{AM : \alpha} \quad \frac{M : \alpha}{JM : \forall x \alpha} \quad \frac{M : \forall x \alpha}{FM : [t/x]\alpha}$$

直観主義述語論理 LJ の公理型は次の 2 つです。

$$(I) \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

$$(N) \quad \perp \rightarrow \alpha$$

直観主義述語論理 LJ の推論規則は次の 8 つです。

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (w \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (c \rightarrow)$$

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \rightarrow \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (e \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (cut)$$

論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \rightarrow \gamma} (\supset \rightarrow), \quad \frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta} (\rightarrow \supset)$$

$$\frac{[t/x]\alpha, \Gamma \rightarrow \gamma}{\forall x \alpha, \Gamma \rightarrow \gamma} (\forall \rightarrow), \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha}{\Gamma \rightarrow \forall x \alpha} (\rightarrow \forall)$$

不動点結合子 Y は次の式を満たす:

$$Yx =_{\beta} x(Yx) .$$