

情報論理学 II 試験 1

2002 年 10 月 21 日 (月)

1. 論理式 $((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \neg\neg\alpha$ の NJ の証明図をえがけ。
2. 論理式 $\forall y(\forall x(\neg pxx \supset pxy) \supset \forall x(pxy \supset \neg pxx) \supset pyy)$ の述語論理の体系 NJ の証明図をえがけ。
3. 推件式 $\rightarrow \forall x\forall y(px \supset py)$ が体系 LK で証明できないことを示せ。
4. 以下の (コンパクト性定理を除く) 諸定理を使ってコンパクト性定理を証明せよ。

定義 0.1 (構造 (structure)) 言語 \mathcal{L} の構造 \mathcal{A} は次の 3 つのものから構成されています:

1. \mathcal{A} の世界と呼ばれる空でない集合 $|\mathcal{A}|$. $|\mathcal{A}|$ の元を \mathcal{A} の個体とといいます。
2. 言語 \mathcal{L} の各々の n 変数関数記号 f に対して, $|\mathcal{A}|$ から $|\mathcal{A}|$ への n 変数関数 $f_{\mathcal{A}}$. (とくに, 0 変数関数記号 e に対して, $e_{\mathcal{A}}$ は \mathcal{A} の個体です.)
3. 言語 \mathcal{L} の各々の n 変数述語記号 p に対して, $|\mathcal{A}|$ の n 個の直積 $|\mathcal{A}|^n$ の部分集合 $p_{\mathcal{A}}$.

言語 \mathcal{L} に \mathcal{A} の個体の全ての名前を付け加えて得られる言語を $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ と書きます. 個体 c の名前を \bar{c} と書きます.

t を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします. 次に \mathcal{A} の個体 $\mathcal{A}(t)$ を帰納的に定義します.

1. $\mathcal{A}(\bar{c}) = c$,
2. $\mathcal{A}(ft_1\dots t_n) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_n))$.

α を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉論理式とします. 次に α の真偽値 $\mathcal{A}(\alpha)$ を帰納的に定義します.

定義 0.2

1. $\mathcal{A}(pt_1\dots t_n) = \top \iff p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_n))$,
2. $\mathcal{A}(\perp) = \perp$,
3. $\mathcal{A}(\alpha \supset \beta) = \mathcal{A}(\alpha) \supset \mathcal{A}(\beta)$,
4. $\mathcal{A}(\forall x\alpha) = \top \iff$ 任意の \mathcal{A} の個体 c に対して $\mathcal{A}([\bar{c}/x]\alpha) = \top$.

定理 0.3 推件式 $\Gamma \rightarrow \Theta$ が LK で証明可能ならば, Γ と Θ のそれぞれの有限部分集合 Γ' と Θ' が存在して $\Gamma' \rightarrow \Theta'$ が LK で証明可能である.

$\Gamma \rightarrow \Theta$ を言語 \mathcal{L} の閉推件式とします. 全ての $\alpha \in \Gamma$ について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ のときには, ある $\beta \in \Theta$ が存在して $\mathcal{A}(\beta) = \top$ となるとき, 推件式 $\Gamma \rightarrow \Theta$ は \mathcal{A} で正しいといえます.

$\Gamma \rightarrow \Theta$ を言語 \mathcal{L} の推件式とします. $\Gamma \rightarrow \Theta$ に自由に現れる個体変数の全てを y_1, \dots, y_n, \dots とします. また, t_1, \dots, t_n, \dots を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします. $\Gamma \rightarrow \Theta$ の自由変数 y_1, \dots, y_n, \dots に t_1, \dots, t_n, \dots をそれぞれ代入して得られる言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉推件式を $\Gamma \rightarrow \Theta$ の \mathcal{A} -代入例 といえます. $\Gamma \rightarrow \Theta$ の任意の \mathcal{A} -代入例 $\Gamma' \rightarrow \Theta'$ が \mathcal{A} で正しいとき, 推件式 $\Gamma \rightarrow \Theta$ は構造 \mathcal{A} で正しいといえます.

$\Gamma \rightarrow \Theta$ を言語 \mathcal{L} の推件式とします. \mathcal{L} の任意の構造 \mathcal{A} で $\Gamma \rightarrow \Theta$ が正しいとき, $\Gamma \rightarrow \Theta$ を恒真であるといえます.

定理 0.4 (LK の健全性定理) 推件式 $\Gamma \rightarrow \Theta$ が LK で証明できれば, $\Gamma \rightarrow \Theta$ は恒真である.

推件式 $\Gamma \rightarrow \Theta$ が恒真でないのは, ある構造 \mathcal{A} と $\Gamma \rightarrow \Theta$ の \mathcal{A} -代入例 $\Gamma' \rightarrow \Theta'$ が存在して, 全ての $\alpha \in \Gamma'$ について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ で全ての $\beta \in \Theta'$ について $\mathcal{A}(\beta) = \perp$ となっているときです. このような構造 \mathcal{A} と \mathcal{A} -代入例 $\Gamma' \rightarrow \Theta'$ の対 $\langle \mathcal{A}, \Gamma' \rightarrow \Theta' \rangle$ を推件式 $\Gamma \rightarrow \Theta$ の反駁 といえます.

定理 0.5 (LK の強完全性定理) 推件式 $\Gamma \rightarrow \Theta$ が恒真ならば $\Gamma \rightarrow \Theta$ は体系 LK で証明できる.

論理式の集合 Γ のモデルとは, 推件式 $\Gamma \rightarrow$ の反駁のことです. Γ が閉論理式の集合のときは, Γ に含まれる全ての論理式 α について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ となっている構造 \mathcal{A} が Γ のモデルとなります.

定理 0.6 (コンパクト性定理) 論理式の集合の任意の有限部分集合がモデルを持てば, もとの集合もモデルを持つ.