# 情報数理学特論VII 試験 5

2008 年 1 月 8 日 (火)

1. 述語論理の体系 NJ の正規化定理を証明せよ。

2. 任意のラムダ項 $M$ にたいして, $\mathsf{Y}(\lambda xyz.M)$ が $x$ についての次の方程式の解であることを示せ:

$$xyz =_\beta M \quad .$$

3. $\overline{\zeta}, \overline{\sigma}, \overline{\pi}$ を次の関係を満たしている閉ラムダ項とする:

$$\overline{\zeta}\,\overline{0} =_\beta \lambda xy.x, \quad \overline{\zeta}\,\overline{n} =_\beta \lambda xy.y \ (n \geq 1),$$

$$\overline{\sigma}\,\overline{n} =_\beta \overline{n+1}, \quad \overline{\pi}\,\overline{n} =_\beta \overline{n-1} \ (n \geq 1).$$

   不動点結合子 $\mathsf{Y}$ および 上記の閉ラムダ項 $\overline{\zeta}, \overline{\sigma}, \overline{\pi}$ と (2 変数関数) 和を表す閉ラムダ項 $\overline{add}$ を使って (2 変数関数) 積を表す閉ラムダ項 $\overline{mul}$ を表せ.

4. 次の 2 つのラムダ項の主要型を求めよ:

$$(\lambda xyz.x(yz))(\lambda xyz.xy), \ (\lambda xy.xyy)(\lambda xyz.x(yz)).$$

   ただし, 主要型であることを示さなくてよい。その型がそのラムダ項の型であることを示すだけでよい。

**注意:** 以下では, 細かな条件 (変数条件など) は省略されている。
**直観主義述語論理 NJ** の推論規則は次の 5 つです。

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta} \qquad \frac{\begin{array}{c} x : \alpha \\ \Pi \\ M : \beta \end{array}}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta}$$

$$\frac{M : \bot}{\mathsf{A}M : \alpha} \qquad \frac{M : \alpha}{\mathsf{J}M : \forall x\alpha} \qquad \frac{M : \forall x\alpha}{\mathsf{F}M : [t/x]\alpha}$$

不動点結合子 $\mathsf{Y}$ は次の式を満たす:

$$\mathsf{Y}x =_\beta x(\mathsf{Y}x) \quad .$$