情報論理学II 試験 4

2003 年 2 月 5 日 (水)

1. 論理式 $\forall y(\forall x(\neg pxx \supset pxy) \supset \forall x(pxy \supset \neg pxx) \supset pyy)$ の述語論理の体系 NJ の証明図をえがけ.
2. 推件式 $\forall x\ rxx \to \forall x \forall y \forall z(rxy \supset rxz \supset \neg ryz \supset rzy)$ が体系 LK で証明できないことを示せ.
3. CL 項 $\lambda^* xyz.x(yz)$ を求めよ (S, K で表せ)。
4. CL 項 $(\lambda^* xyz.x(yz))xyz$ を weak reduction せよ。
5. ラムダ項 $\lambda xy.(\lambda uvy.v(xy))(xy)(\lambda z.zy)$ が持つ最も一般的な型 δ を求め, $\lambda xy.(\lambda uvy.v(xy))(xy)(\lambda z.zy) \in \delta$ に至る TA_λ の証明図をかけ。
6. ラムダ項 $\lambda xy.(\lambda uvy.v(xy))(xy)(\lambda z.zy)$ の β 正規形 (β-nf) M を求め, M が持つ最も一般的な型 δ を求め, $M \in \delta$ に至る TA_λ の証明図をかけ。

定義 0.1 (構造 (structure)) 言語 $\mathcal{L}$ の構造 $\mathcal{A}$ は次の 3 つのものから構成されています:

1. $\mathcal{A}$ の世界と呼ばれる空でない集合 $|\mathcal{A}|$. $|\mathcal{A}|$ の元を $\mathcal{A}$ の個体といいます.
2. 言語 $\mathcal{L}$ の各々の n 変数関数記号 f に対して, $|\mathcal{A}|$ から $|\mathcal{A}|$ への n 変数関数 $f_\mathcal{A}$. (とくに, 0 変数関数記号 e に対して, $e_\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の個体です.)
3. 言語 $\mathcal{L}$ の各々の n 変数述語記号 p に対して, $|\mathcal{A}|$ の n 個の直積 $|\mathcal{A}|^n$ の部分集合 $p_\mathcal{A}$.

言語 $\mathcal{L}$ に $\mathcal{A}$ の個体の全ての名前を付け加えて得られる言語を $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ と書きます. 個体 c の名前を $\bar{c}$ と書きます.

t を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします. 次に $\mathcal{A}$ の個体 $\mathcal{A}(t)$ を帰納的に定義します.

1. $\mathcal{A}(\bar{c}) = c$,

2. $\mathcal{A}(ft_1...t_n) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), ..., \mathcal{A}(t_n))$.

α を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉論理式とします. 次に α の真偽値 $\mathcal{A}(\alpha)$ を帰納的に定義します.

定義 0.2

1. $\mathcal{A}(pt_1...t_n) = \top \Longleftrightarrow p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), ..., \mathcal{A}(t_n))$,

2. $\mathcal{A}(\bot) = \bot$,

3. $\mathcal{A}(\alpha \supset \beta) = \mathcal{A}(\alpha) \supset \mathcal{A}(\beta)$,

4. $\mathcal{A}(\forall x\alpha) = \top \Longleftrightarrow$ 任意の $\mathcal{A}$ の個体 c に対して $\mathcal{A}([\bar{c}/x]\alpha) = \top$.

$\Gamma \to \Theta$ を言語 $\mathcal{L}$ の閉推件式とします. 全ての $\alpha \in \Gamma$ について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ のときには, ある $\beta \in \Theta$ が存在して $\mathcal{A}(\beta) = \top$ となるとき, 推件式 $\Gamma \to \Theta$ は $\mathcal{A}$ で正しいといいます.

$\Gamma \to \Theta$ を言語 $\mathcal{L}$ の推件式とします. $\Gamma \to \Theta$ に自由に現れる個体変数の全てを $y_1, ..., y_n, ...$ とします. また, $t_1, ..., t_n, ...$ を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします. $\Gamma \to \Theta$ の自由変数 $y_1, ..., y_n, ...$ に $t_1, ..., t_n, ...$ をそれぞれ代入して得られる言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉推件式を $\Gamma \to \Theta$ の **$\mathcal{A}$-代入例** といいます. $\Gamma \to \Theta$ の任意の $\mathcal{A}$-代入例 $\Gamma' \to \Theta'$ が $\mathcal{A}$ で正しいとき, 推件式 $\Gamma \to \Theta$ は構造 $\mathcal{A}$ で正しいといいます.

$\Gamma \to \Theta$ を言語 $\mathcal{L}$ の推件式とします. $\mathcal{L}$ の任意の構造 $\mathcal{A}$ で $\Gamma \to \Theta$ が正しいとき, $\Gamma \to \Theta$ を**恒真**であるといいます.

定理 0.3 (LK の健全性定理) 推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で証明できれば, $\Gamma \to \Theta$ は恒真である.

推件式 $\Gamma \to \Theta$ が恒真でないのは, ある構造 $\mathcal{A}$ と $\Gamma \to \Theta$ の $\mathcal{A}$-代入例 $\Gamma' \to \Theta'$ が存在して, 全ての $\alpha \in \Gamma'$ について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ で 全ての $\beta \in \Theta'$ について $\mathcal{A}(\beta) = \bot$ となっているときです. このような構造 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$-代入例 $\Gamma' \to \Theta'$ の対 $< \mathcal{A}, \Gamma' \to \Theta' >$ を推件式 $\Gamma \to \Theta$ の**反駁**といいます.

定義 0.4 (Weak reduction) Any CL-term KXY or $SXYZ$ is called a (weak) redex. Contracting an occurence of a redex in a term U means replacing one occurence of

$$\begin{array}{lll} KXY & \textit{by} & X, \\ SXYZ & \textit{by} & XZ(YZ). \end{array}$$

If this changes U to U', we say that U (weakly) contracts to U' , or

$$U \rhd_{1w} U'.$$

We say that U (weakly) reduces to V, or

$$U \rhd_w V$$

iff V is obtained from U by a finite (perhaps empty) series of weak contractions.

定義 0.5 (Abstraction) For each CL-term M and each variable x, a CL-term $\lambda^* x.M$ is defined by induction on M, thus:

$$\begin{array}{llcll} (a) & \lambda^* x.M & \equiv & KM & \text{if } x \notin FV(M); \\ (b) & \lambda^* x.x & \equiv & SKK & ; \\ (c) & \lambda^* x.Ux & \equiv & U & \text{if } x \notin FV(U); \\ (d) & \lambda^* x.UV & \equiv & S(\lambda^* x.U)(\lambda^* x.V) & \text{if neither (a) nor (c) applies.} \end{array}$$

定義 0.6 (The type-assignment system $\mathbf{TA}_\lambda$) It has no axiom-schemes and two rules the $\to$-elimination rule ($\to$e) and the $\to$-introduction rule ($\to$i);

$$\frac{X \in \alpha \to \beta \quad Y \in \alpha}{XY \in \beta} \, (\to \mathrm{e}),$$

$$\frac{\begin{array}{c}[x \in \alpha] \\ M \in \beta\end{array}}{\lambda x.M \in \alpha \to \beta} \, (\to \mathrm{i}).$$