線形代数学 B 試験 略解

1998 年 12 月 5 日 (土)

以下に述べるのは略解であるので, 4 を除いてこのままでは満点にはならない。例えば, 3 では式 (1) をどのように導いたかと, 数学的帰納法による証明を書く必要がある。

1.

$$\begin{bmatrix} a & x & x & \dots & x \\ x & a & x & \dots & x \\ x & x & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列基本変形}} \begin{bmatrix} a+(n-1)x & x & x & \dots & x \\ a+(n-1)x & a & x & \dots & x \\ a+(n-1)x & x & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)x & x & x & \dots & a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} a+(n-1)x & x & x & \dots & x \\ 0 & a-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-x \end{bmatrix}$$

$$\text{答} \quad \begin{cases} a+(n-1)x \neq 0 \text{ かつ } x \neq a & \text{のとき} \quad n \\ a+(n-1)x = 0 \text{ かつ } x \neq a & \text{のとき} \quad n-1 \\ x = a \neq 0 & \text{のとき} \quad 1 \\ x = a = 0 & \text{のとき} \quad 0 \end{cases}$$

2.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \text{とおく。}$$

そのとき, 与えられた方程式が解を持つための必要十分条件は $\operatorname{rank}([A, \mathbf{b}]) = \operatorname{rank}(A)$ となることである。すなわち, $\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の 1 次結合で表されることである。

$$A \xrightarrow{\text{列基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるので，

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (a, b \text{ は任意定数})$$

となる。

3. 与式 $= F(n)$ とおくと，

$$F(n) = (1 + x^2)F(n-1) - x^2F(n-2) \quad (n > 2) \tag{1}$$

となる。また，

$$F(1) = 1 + x^2, \quad F(2) = 1 + x^2 + x^4 \tag{2}$$

である。(1) と (2) から数学的帰納法[1]を使って

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$$

を示すことができる。

4. 答は「3 平面が原点を通る直線を共有している」である。以下でそれを証明する。

まず，3 平面は全て原点を通っている。$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ なので，

方程式 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ は自明でない解 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ を持つ。よって 3 平面は全て点 $[a\ b\ c]$ を通る。故に，3 平面は原点と点 $[a\ b\ c]$ を通る直線を共有する。

逆に，3 平面が原点を通る直線を共有するとする。共有する直線の原点以外の点を $[a\ b\ c]$ とする。このとき，方程式 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ は自明でない解 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ を持つ。

よって，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ である。

数学的帰納法 1

自然数 (ここでは，1 以上の整数のこと。0 以上の整数を意味することもあるので注意が必要。) n に関する命題 $P(n)$ が

すべての自然数 n に対して成り立つ

ことを証明するには次の 2 つのことを証明すればよい。

[1] $P(1)$ が成り立つ。

[2] $P(k)$ が成り立つと仮定すれば，
$P(k+1)$ も成り立つ。

[1] ここでは，後述する数学的帰納法 2 を使う。高校では数学的帰納法 1 を学んでいる。

数学的帰納法 2

自然数 n に関する命題 $P(n)$ が

すべての自然数 n に対して成り立つ

ことを証明するには次の 2 つのことを証明すればよい。

[1] $P(1)$ および $P(2)$ が成り立つ。

[2] $P(k)$ および $P(k+1)$ が成り立つと仮定すれば,
$P(k+2)$ も成り立つ。