部分構造論理 (特に, BCK 論理) への招待

古森 雄一 (千葉大学 総合メディア基盤センター)

30 年近く前, 東京大学の数学科 (正式には, 理学系研究科数学専攻) の大学院の試験の面接の終了後の合格者を決める議論の時のことです。ある受験生の数学についての知識のなさが話題になりました。そのとき小平邦彦先生が, 彼の志望は数学基礎論であり数学基礎論はあまり知識がなくても研究ができる分野であるとの趣旨の発言をしました。さらに, 次のようなスマリヤンの話をしました。スマリヤンはプロのマジシャンだったのですが, 40 才を過ぎてから数学を本格的にやりたくなり, どの分野がいいかと調べたところ予備知識が最も少なくてすむ数学基礎論を選んだ。

私はこの会議に出席していたわけではなく人から聞いた話なので, ことの真偽程は分かりません。しかし, スマリヤンの学位論文は読んだことがあったので彼はマジシャンだったのかと妙に感心しました。その後, スマリヤンが 40 過ぎたプロのマジシャンは数学者になれるが, 40 過ぎた数学者はプロのマジシャンにはなれないだろう, と言ったとかいう話を聞きました。しばらくして, スマリヤンは「What Is the Name of This Book?」という書名の論理パズルの本を書き, その後もゲーデルの不完全性定理に関係した一連のパズルの本を著し, 論理パズル作家としても有名になりました。

前世紀の初め, カントールの (素朴) 集合論が矛盾を導き, その集合論を基礎に数学全体を築こうとしつつあったので深刻な問題になりました。その問題を解決するためにヒルベルトは数学を形式化し, それの無矛盾性を証明することを提案しました。論理や数学理論の形式化というのは, 使用する記号をきちんと定め, その記号を使って命題を表している論理式がどのように作られるかを決めてやり (言語を定めるという), 証明を表している推論図をきちんと定義してやることです。ヒルベルトが提案した数学の無矛盾性を研究する分野が数学基礎論であると思っている人がいるかも知れません。しかし, 現在ではこのような狭い意味での数学基礎論を研究している人はごく少数です。数学の形式化に伴って新しく生まれた研究対象を総称して数学基礎論といっていると思ってよいでしょう。数理論理学という言葉も広い意味では (広い意味での) 数学基礎論と同じような意味で使われています。ただ, 数理論理学は狭い意味で使われることも多く, そのときは形式化された体系の中で論理と呼ばれる体系を扱う分野ということです。そしてそのような研究対象を数学を使って研究しているのです。数学の対象が自然数, 複素数, ユークリッド空間から抽象的な体や多様体に広がったように形式的体系に広がったのです。

大学院面接の話から 30 年近く経ったのですが, 現在の状況はどうなのでしょうか。数学基礎論は今でもそれほどの知識がなくてもできる分野なのでしょうか? 残念なことにそうではなくなっています。数学基礎論の中でも分野が違うと話が通じ難くなっています。それぞれの分野が深化した結果です。最先端に立つまでに学ぶべきものも増えてしまいました。例えば, 数学の無矛盾性の研究の最先端の論文は私には理解不可能です。一方, 数

学基礎論研究者の共通の知識は以前に比べて増えているかとういと, 修士課程の修了時の数学基礎論を学んでいる人の共通の知識は 30 年前に比べて減っています。最先端への行くための知識の習得が忙しくなり共通の基盤を学ぶゆとりがなくなって来ているのでしょう。学問の進歩に伴うジレンマで仕方がないことなのかも知れません。ここでは, 少なくなった共通の知識だけで分かり, しかも最先端でもある話をしたいと思います。お話する内容のキーワードは直観主義論理, 部分構造論理, 集合論, ラムダ計算です。

素朴集合論の矛盾に対処するために, ブラウアーは直観主義という考えを提唱しました。直観主義では, 排中律 $A \vee \neg A$ や二重否定の除去 $\neg\neg A \supset A$ の無制限の使用を禁じました。ハイティングは直観主義で使われる論法を形式化して, 一つの体系を作りました。その体系は排中律などが証明できないので普通の論理 (古典論理) より弱い論理なのですが, 普通の論理の真似をすることができるので, 強弱の定義によっては強い論理ともいえます。1930 年代にゲンツェンが直観主義論理に対して自然演繹体系 NJ という簡単で美しい体系を作りました。体系 NJ は論理記号を「ならば」を表す '⊃' に限ればたった 2 つの単純な推論規則だけで記述できます。このゲンツェンの発見は論理学の歴史での最も大きな出来事の一つであります。また, NJ は論理記号を '⊃' に限っても十分に面白い体系でもあります。

論理記号が '⊃' だけの NJ の推論規則は次の 2 つです:

$$\dfrac{\alpha \supset \beta \quad \alpha}{\beta}\ (\supset 除去), \qquad \dfrac{\begin{array}{c} k \\ \alpha \\ \Pi \\ \beta \end{array}}{\alpha \supset \beta}\ k(\supset 導入).$$

規則 (⊃ 導入) において仮定 α が**落ちた**といいます。推論規則に従って論理式を木状に配置した図形を**推論図**といいます。ここだけの用語法ですが, 全ての仮定が落ちている推論図を**証明図**ということにします。次の例は論理式 $(\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma))$ の証明図です。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{\alpha \supset (\beta \supset \gamma)} \quad \overset{1}{\alpha}}{\beta \supset \gamma}\ (\supset 除去) \quad \dfrac{\overset{2}{\alpha \supset \beta} \quad \overset{1}{\alpha}}{\beta}\ (\supset 除去)}{\gamma}\ (\supset 除去)}{\alpha \supset \gamma}\ 1(\supset 導入)}{(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma)}\ 2(\supset 導入)}{(\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma))}\ 3(\supset 導入)$$

この体系では証明できない (しかし古典論理では証明できる) 論理式にパースの論理式 $((p \supset q) \supset p) \supset p$ があります。

体系 NJ に集合論の言語と論理式で書けるものは何でも集合とする (このような集合論を以後, 素朴集合論ということにします) という規則を付け加えるとラッセルのパラドックスが出てきます。ここでは集合論の言語としてラムダ計算の言語を用います。普通の集合論の言語では $M \in N$ と書くところをラムダ計算では NM と書きます。また, $\{x \mid M\}$ を $\lambda x.M$ と表現します。ラムダ計算の言語では $(MN)R$ という表現が現われますが, これに対応する普通の集合論の表現はありません。

素朴集合論の規則は次の 2 つで表現できます:

$$\dfrac{(\lambda x.M)N}{[N/x]M}\ (代入), \qquad \dfrac{[N/x]M}{(\lambda x.M)N}\ (抽象).$$

ここで, $[N/x]M$ は M に現われる x に N を代入した結果を表します。例えば, $[N/x](xx \supset \alpha)$ は α に x が現れないときは $NN \supset \alpha$ のことです。

この体系でラッセルのパラドックスを導いて見せましょう。この体系は否定がないので矛盾とは全ての論理式が導けてしまうことです。いま, 導きたい論理式を α とします。x を α に現われない変数とします。R_α を $\lambda x.(xx \supset \alpha)$ の省略記号とします。次が α の証明図です。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{R_\alpha R_\alpha}}{(R_\alpha R_\alpha) \supset \alpha}\,\text{(代入)} \quad \overset{1}{R_\alpha R_\alpha}}{\alpha}\,(\supset \text{除去})}{(R_\alpha R_\alpha) \supset \alpha}\,1(\supset \text{導入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{R_\alpha R_\alpha}}{(R_\alpha R_\alpha) \supset \alpha}\,\text{(代入)} \quad \overset{2}{R_\alpha R_\alpha}}{\alpha}\,(\supset \text{除去})}{(R_\alpha R_\alpha) \supset \alpha}\,2(\supset \text{導入})}{R_\alpha R_\alpha}\,\text{(抽象)}}{\alpha}\,(\supset \text{除去})$$

さて, この α の証明図では 規則 ($\supset$ 導入) において, 一度に 2 つの $R_\alpha R_\alpha$ が仮定から落ちていることが効いています。規則 ($\supset$ 導入) において, 一度には高々 1 つの仮定しか落とせないと制限した論理を **BCK 論理**といいます。一般に規則 ($\supset$ 導入) において, 仮定を落とせる個数や順番を制限した論理のことを**部分構造論理**といいます。「部分構造論理」という言葉は 1990 年代になって使われるようになった新しいものです。論理を BCK にすると素朴集合論は矛盾は出ないのでしょうか。この問題に答えるには, 言語をもう少し拡張する必要があります。いままでのところでは, 「全ての」を表す '$\forall$' という記号が現われていません。「ならば」, 「かつ」などの接続詞だけを扱う論理を命題論理, それに加えて「全ての」と「が存在する」という概念も取扱うのが述語論理です。そういう意味ではラッセルのパラドックスは命題論理と抽象のパラドックスということができます。言語に '$\forall$' を加えて '$\forall$' についての次の 2 つの推論規則も加えます:

$$\frac{\alpha}{\forall x \alpha}\ (\forall\ \text{導入}), \qquad \frac{\forall x \alpha}{[t/x]\alpha}\ (\forall\ \text{除去}).$$

ここで, 規則 ($\forall$ 導入) においては変数 x は落ちていない仮定には現われない。

さらに, 規則 (代入) を $(\lambda x.M)N$ が現われている部分を $[N/x]M$ に置き換えてよいと強め, 規則 (抽象) も同じように強めたものを BCK 論理上の素朴集合論ということにします。この体系は 1980 年代に無矛盾であることが証明されました。また, この集合論に同じ元を持つ集合は等しいという外延性の公理

$$\forall x(yx \supset zx) \supset (\forall x(zx \supset yx) \supset (uy \supset uz))$$

を付け加えると矛盾することも知られています。

部分構造論理の一つに**線形論理**というのがあります。線形論理には論理記号'!' があり, $!\alpha$ という形の仮定については一度にいくつでも落とせるという推論規則があります。BCK 論理上の素朴集合論では '!' が定義できて, 線形論理と同じような規則が許されるということが 最近になって分かりました。$!\alpha$ を次のように定義します:

$$!\alpha \quad \text{は} \quad \forall x(x(\forall y(y \supset y)) \supset x\alpha) \quad \text{のこととする。}$$

こう定義すると「!」については次の 2 つの推論規則が許されることが分かります。

$$\dfrac{!\alpha}{\alpha}\ (!\text{除去}),\qquad \dfrac{\begin{array}{c} k \\ !\alpha \\ \Pi \\ \beta \end{array}}{!\alpha \supset \beta}\ k(!\supset\text{導入}).$$

ただし, (!⊃ 導入) において仮定はいくつでも落とせる。

$R^!_\alpha$ を $\lambda x.(!xx \supset \alpha)$ の省略記号とする。上の二つが許される規則であることを使うと, 次のように $R^!_\alpha R^!_\alpha$ であることが示せます。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}1\\ !(R^!_\alpha R^!_\alpha)\end{array}}{R^!_\alpha R^!_\alpha}\ (!\text{除去})}{!(R^!_\alpha R^!_\alpha) \supset \alpha}\ (\text{代入}) \qquad \begin{array}{c}1\\ !(R^!_\alpha R^!_\alpha)\end{array}}{\alpha}\ (\supset\text{除去})}{!(R^!_\alpha R^!_\alpha) \supset \alpha}\ 1(!\supset\text{導入})}{R^!_\alpha R^!_\alpha}\ (\text{抽象})$$

つまり任意の論理式 α に対して集合 $R^!_\alpha$ は自分自身を元として含むのです。これもごく最近の発見です。

このように BCK 論理上の素朴集合論は非常にシンプルな体系ですが, そこで遊んでいると新たな発見があるかもしません。皆さんも遊んでみてください。ただ, この体系は型無しラムダ計算という豊かな体系を完全に含んでいますので, ラムダ計算についての知識がある方がより楽しむことができます。そのようなわけで, この話はラムダ計算への招待でもあります。