1 2001/05/11

情報数学 I 第 1 回試験

問題 1.1. CLw において, 定数記号 C と K だけを使って作られる閉項 I で $Ix \rhd x$ が証明可能であるようなものを見つけ, その証明図をえがけ.

問題 1.2. 任意の項 α に対して, 次の式が CLw で証明できる変数 x を含まない項 β が存在することを示せ:

$$\beta x \rhd \alpha.$$

問題 1.3. (B') $(\alpha \supset \beta) \supset (\beta \supset \gamma) \supset \alpha \supset \gamma$ が HK で証明可能であることを示せ.

問題 1.4. HK の公理型 (C) が NJ で証明可能であることを示せ.

問題 1.5. 次の推論図の正規形をもとめよ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\alpha\supset\beta}}{\beta\supset\alpha\supset\beta}\,1}{(\alpha\supset\beta)\supset\beta\supset\alpha\supset\beta}\,2 \quad \overset{3}{\alpha\supset\beta}}{\beta\supset(\alpha\supset\beta)} \quad \overset{4}{\beta}}{\alpha\supset\beta}}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\,3}{\beta\supset(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\,4 \quad \overset{5}{\beta}}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}.$$

CLw 組み合せ論理の体系 CLw の公理型は次の 4 つである:

$$\begin{array}{ll} (B) & B\alpha\beta\gamma \rhd \alpha(\beta\gamma), \\ (C) & C\alpha\beta\gamma \rhd \alpha\gamma\beta, \\ (K) & K\alpha\beta \rhd \alpha, \\ (W) & W\alpha\beta \rhd \alpha\beta\beta. \end{array}$$

組み合せ論理の体系 CLw の推論規則は次の 3 つである:

$$\dfrac{\beta \rhd \gamma}{\alpha\beta \rhd \alpha\gamma}\ (\mu), \qquad \dfrac{\alpha \rhd \beta}{\alpha\gamma \rhd \beta\gamma}\ (\nu), \qquad \dfrac{\alpha \rhd \beta \quad \beta \rhd \gamma}{\alpha \rhd \gamma}\ (\tau).$$

HK 古典命題論理 HK の公理型は次の 6 つである:

$$\begin{array}{ll} (B) & (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma, \\ (C) & (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma, \\ (K) & \alpha \supset \beta \supset \alpha, \\ (W) & (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta, \\ (L3) & ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha, \\ (N) & \bot \supset \alpha. \end{array}$$

古典命題論理 HK の推論規則は次の形のものだけである:

$$\dfrac{\alpha \supset \beta \quad \alpha}{\beta}.$$

NJ 直観主義述語論理の自然推論の体系 NJ の推論図は次のように定義される:

1. 1 つの論理式の上に数字が書かれている図形は推論図である.
2. 推論図 Π_1 の一番下に現れる論理式が $\alpha \to \beta$ で推論図 Π_2 の一番下に現れる論理式が α のとき, 次の図形は推論図である:
$$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\beta}.$$
このとき, 使われた推論規則は $\supset$-E であるといい, 推論規則は
$$\frac{\alpha \supset \beta \quad \alpha}{\beta}$$
とかかれる.
3. 推論図 Π のなかの落ちていない仮定のうちで数字 k の下にある論理式は, あったとしても α だけとする. また, Π の一番下に現れる論理式が β であるとする. このとき次の図形は推論図である:
$$\frac{\Pi}{\alpha \supset \beta}\ k.$$
このとき, 使われた推論規則は $\supset$-I であるといい, 推論規則は
$$\frac{\begin{array}{c} k \\ \alpha \\ \beta \end{array}}{\alpha \supset \beta}\ k$$
とかかれる. この推論規則を使うまでは落ちていなかった数字 k の下にある仮定 α は全て, この推論規則を使った結果, 落ちたという.
4. 推論図 Π を一番下に現れる論理式が $\perp$ の推論図で, α を任意の論理式とする. このとき次の図形は推論図である:
$$\frac{\Pi}{\alpha}.$$
このとき, 使われた推論規則は $\perp$-E であるといい, 推論規則は
$$\frac{\perp}{\alpha}$$
とかかれる.
5. 上の 1, 2, 3, 4 から推論図と分かるものだけが推論図で, それらから落ちたと分かる仮定だけが落ちている.

NJ の推論図の β-変形 NJ の推論図の中に現れる次のような部分

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c} k \\ \alpha \\ \Pi_1 \\ \beta \end{array}}{\alpha \supset \beta}\ k \quad \begin{array}{c} \Pi_2 \\ \alpha \end{array}}{\beta}$$

を

$$\begin{array}{c} \Pi_2 \\ k \\ [\alpha] \\ \Pi_1 \\ \beta \end{array}$$

に変えることを $\alpha \supset \beta$ での β-変形という.

2　2001/06/08

情報数学 I 第 2 回試験

問題 2.1.　次の推論図の正規形をもとめよ:

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\quad \overset{1}{\alpha\supset\beta}}{\alpha\supset\beta}}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\,1}{((\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta)\supset(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\,2
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\alpha\supset\beta}\quad\overset{1}{\alpha}}{\beta}}{\alpha\supset\beta}\,1}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\,2
}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\ .
$$

問題 2.2.　(W) $(\alpha\supset\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta$ が LK で証明可能であることを示せ.

問題 2.3.　$\neg$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ の真理表を作れ.

問題 2.4.　論理式 $(p\supset r)\supset((q\supset r)\supset r)\supset r$ が HK で証明できないことを示せ.

LK　ゲンツェン流の古典命題論理 LK の公理型は次の 2 つである.

$$
\begin{array}{cccc}
(I) & \alpha & \rightarrow & \alpha \\
(N) & \perp & \rightarrow &
\end{array}
$$

ゲンツェン流の古典命題論理 LK の推論規則は全部で 9 つあり, 構造に関するものと論理記号に関するものとに分類されている:

構造に関する推論規則

割増 (weakening)

$$
\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta}{\alpha,\Gamma\rightarrow\Theta}\ (w\rightarrow) \qquad \dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta}{\Gamma\rightarrow\Theta,\alpha}\ (\rightarrow w)
$$

縮約 (contraction)

$$
\dfrac{\alpha,\alpha,\Gamma\rightarrow\Theta}{\alpha,\Gamma\rightarrow\Theta}\ (c\rightarrow) \qquad \dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\alpha,\alpha}{\Gamma\rightarrow\Theta,\alpha}\ (\rightarrow c)
$$

交換 (exchanging)

$$
\dfrac{\Delta,\alpha,\beta,\Gamma\rightarrow\Theta}{\Delta,\beta,\alpha,\Gamma\rightarrow\Theta}\ (e\rightarrow) \qquad \dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\alpha,\beta,\Lambda}{\Gamma\rightarrow\Theta,\beta,\alpha,\Lambda}\ (\rightarrow e)
$$

切断 (cut)

$$
\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\alpha\quad \alpha,\Delta\rightarrow\Lambda}{\Gamma,\Delta\rightarrow\Theta,\Lambda}\ (cut)
$$

論理記号に関する推論規則

$\supset$ に関する規則

$$
\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\alpha\quad \beta,\Delta\rightarrow\Lambda}{\alpha\supset\beta,\Gamma,\Delta\rightarrow\Theta,\Lambda}\ (\supset\rightarrow) \qquad \dfrac{\alpha,\Gamma\rightarrow\Theta,\beta}{\Gamma\rightarrow\Theta,\alpha\supset\beta}\ (\rightarrow\supset)
$$

論理記号の略記

1. $\neg\alpha=\alpha\supset\perp$;
2. $\alpha\wedge\beta=\neg(\alpha\supset\neg\beta)$;
3. $\alpha\vee\beta=(\alpha\supset\beta)\supset\beta$;
4. $\alpha\leftrightarrow\beta$ は $(\alpha\supset\beta)\wedge(\beta\supset\alpha)$.

$\supset$ の真理表

α	β	$\alpha \supset \beta$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

HK の健全性定理　論理式 α が体系 HK で証明できるならば, α はトートロジーである.

3 2001/07/06

情報数学 I 第 3 回試験

問題 3.1.

1. $[fx_0/x_0](\forall x_1\ px_0x_1 \supset \forall x_0\ px_0x_0)$ はどんな論理式か.
2. $[fx_1/x_0]\forall x_1\ px_0x_1$ はどんな論理式か.

問題 3.2.

1. HJ の公理型 $(F1)$ が NJ で証明可能であることを示せ.
2. HJ の公理型 $(F2)$ が NJ で証明可能であることを示せ.

問題 3.3. 論理式 α から論理式 α^* への変換を次のように帰納的に定義する:

1. α が原子論理式ならば $\alpha^* \equiv \alpha$;
2. $(\alpha \supset \beta)^* \equiv \alpha^* \supset \beta^*$;
3. $(\forall x\alpha)^* \equiv \forall x\neg\neg\alpha^*$.

このとき, 次の 1, 2 を証明せよ:

1. $\alpha \supset \alpha^*$ と $\alpha^* \supset \alpha$ は HK で証明可能である;
2. $\alpha \to \alpha^*$ と $\alpha^* \to \alpha$ は LK で証明可能である.

HK 古典述語論理 HK の公理型は次の 8 つである:

$$
\begin{array}{ll}
(B) & (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma, \\
(C) & (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma, \\
(K) & \alpha \supset \beta \supset \alpha, \\
(W) & (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta, \\
(L3) & ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha, \\
(N) & \bot \supset \alpha, \\
(F1) & \forall x\alpha \supset [t/x]\alpha, \\
(F2) & \forall x(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \forall x\beta, \\
 & \text{ここで, } \alpha \text{ には変数 } x \text{ が自由には現れない.}
\end{array}
$$

古典命題論理 HK の推論規則は次の 2 つである:

$$\frac{\alpha \supset \beta \quad \alpha}{\beta},$$

$$\frac{\alpha}{\forall x\alpha} \quad \text{ただし仮定には変数 } x \text{ が自由に現れない}.$$

HK の公理型から公理型 $(L3)$ を取り除くと直観主義述語論理の体系が得られる. その体系を HJ とよぶ.

NJ 直観主義述語論理の自然推論の体系 NJ の推論図は次のように定義される:

1. 1 つの論理式の上に数字が書かれている図形は推論図である.

2. 推論図 Π_1 の一番下に現れる論理式が $\alpha \supset \beta$ で推論図 Π_2 の一番下に現れる論理式が α のとき, 次の図形は推論図である:

$$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\beta}.$$

このとき, 使われた推論規則は ⊃-E であるといい, 推論規則は

$$\frac{\alpha \supset \beta \quad \alpha}{\beta}$$

とかかれる.

3. 推論図 Π のなかの落ちていない仮定のうちで数字 k の下にある論理式は, あったとしても α だけとする. また, Π の一番下に現れる論理式が β であるとする. このとき次の図形は推論図である:

$$\frac{\Pi}{\alpha \supset \beta}\ k.$$

このとき, 使われた推論規則は ⊃-I であるといい, 推論規則は

$$\frac{\begin{matrix} k \\ \alpha \\ \beta \end{matrix}}{\alpha \supset \beta}\ k$$

とかかれる. この推論規則を使うまでは落ちていなかった数字 k の下にある仮定 α は全て, この推論規則を使った結果, 落ちたという.

4. 推論図 Π を一番下に現れる論理式が $\perp$ の推論図で, α を任意の論理式とする. このとき次の図形は推論図である:

$$\frac{\Pi}{\alpha}.$$

このとき, 使われた推論規則は ⊥-E であるといい, 推論規則は

$$\frac{\perp}{\alpha}$$

とかかれる.

5. 推論図 Π の一番下に現れる論理式が α であるとする. また, Π の落ちていない仮定には変数 x は自由に現れないものとする. このとき次の図形は推論図である:

$$\frac{\Pi}{\forall x \alpha}.$$

このとき, 使われた推論規則は ∀-I であるといい, 推論規則は

$$\frac{\alpha}{\forall x \alpha}$$

とかかれる.

6. 推論図 Π の一番下に現れる論理式が $\forall x \alpha$ であるとする. このとき次の図形は推論図である:

$$\frac{\Pi}{[t/x]\alpha}.$$

このとき, 使われた推論規則は ∀-E であるといい, 推論規則は

$$\frac{\forall x \alpha}{[t/x]\alpha}$$

とかかれる.

7. 上の 1, 2, 3, 4, 5, 6 から推論図と分かるものだけが推論図で, それらから落ちたと分かる仮定だけが落ちている.

LK ゲンツェン流の古典述語論理 LK の公理型は次の 2 つである.

$$
\begin{array}{llll}
(I) & \alpha & \to & \alpha \\
(N) & \perp & \to &
\end{array}
$$

ゲンツェン流の古典述語論理 LK の推論規則は全部で 11 個あり, 構造に関するものと論理記号に関するものとに分類されている:

構造に関する推論規則

割増 (weakening)

$$
\frac{\Gamma \to \Theta}{\alpha, \Gamma \to \Theta}\ (w \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \alpha}\ (\to w)
$$

縮約 (contraction)

$$
\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \to \Theta}{\alpha, \Gamma \to \Theta}\ (c \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha, \alpha}{\Gamma \to \Theta, \alpha}\ (\to c)
$$

交換 (exchanging)

$$
\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \to \Theta}\ (e \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha, \beta, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, \beta, \alpha, \Lambda}\ (\to e)
$$

切断 (cut)

$$
\frac{\Gamma \to \Theta, \alpha \quad \alpha, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\ (cut)
$$

論理記号に関する推論規則

$\supset$ に関する規則

$$
\frac{\Gamma \to \Theta, \alpha \quad \beta, \Delta \to \Lambda}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\ (\supset\to) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \Theta, \beta}{\Gamma \to \Theta, \alpha \supset \beta}\ (\to\supset)
$$

$\forall$ に関する規則

$$
\frac{[t/x]\alpha, \Gamma \to \Theta}{\forall x\alpha, \Gamma \to \Theta}\ (\forall \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha}{\Gamma \to \Theta, \forall x\alpha}\ (\to \forall)
$$

ただし推論規則 $(\to \forall)$ においては, 変数 x は推論規則の下式には自由に現れないものとする.

参考文献

[0] 古森雄一, 数理論理学.