

# $\lambda$ -計算での2進数による数の計算

大家幸敏(千葉大学 自然科学研究科)

定義 1 以下のように「裸の数」を定義する。

$$\begin{aligned}\tilde{1} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda xyz.x \\ \tilde{0} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda xyz.y \\ \widetilde{-1} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda xyz.z\end{aligned}$$

これらの対 (*pair*) として 2 進数を表現する。

例 2  $4_{(10)} = 100_{(2)}$  は次のように表現する。

$$\langle \langle \tilde{1}, \tilde{0} \rangle, \tilde{0} \rangle$$

また、次のような表現もできる。

$$\begin{aligned}&\langle \langle \langle \tilde{0}, \tilde{1} \rangle, \tilde{0} \rangle, \tilde{0} \rangle \\ &\langle \langle \langle \tilde{1}, \widetilde{-1} \rangle, \tilde{0} \rangle, \tilde{0} \rangle \\ &\langle \langle \langle \langle \tilde{1}, \widetilde{-1} \rangle, \widetilde{-1} \rangle, \tilde{0} \rangle, \tilde{0} \rangle\end{aligned}$$

定義 3  $K_j^i$  を次のように定義する。

$$K_j^i \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x_1 \dots x_i.x_j$$

定義 4 引数が「裸の数」の場合は  $T = K$ 、対の場合は  $F = KI$  を返す term  $Isn$  を次のように定義する。

$$Isn \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x.x K_3^3 KKI(KI)K$$

$K$  および  $I$  は以下の term。

$$\begin{aligned} K &= \lambda xy.x \\ I &= \lambda x.x \end{aligned}$$

*lamal*への入力 (1) —————

$K = \lambda x y x;$   
 $I = \lambda x x;$

$N1 = \lambda x y z x; \% = \tilde{1} \%$   
 $N0 = \lambda x y z y; \% = \tilde{0} \%$   
 $Nm1 = \lambda x y z z; \% = \tilde{-1} \%$

$K33 = \lambda x y z z; \% = K_3^3 \%$   
 $Pair = \lambda x y z (z x y);$   
 $Isn = \lambda x (x K33 K K I (K I) K);$

## 出力結果

```
Isn N1 t f;
Isn N1 t f
( lambda x ( x ( lambda x y z z ) ( co856 : lambda x y x ) co856 ( co824 : lambda
x x ) ( co856 co824 ) co856 ) ) ( lambda x y z x ) t f
t

Isn N0 t f;
Isn N0 t f
( lambda x ( x ( lambda x y z z ) ( co856 : lambda x y x ) co856 ( co824 : lambda
x x ) ( co856 co824 ) co856 ) ) ( lambda x y z y ) t f
t

Isn Nm1 t f;
Isn Nm1 t f
( lambda x ( x ( lambda x y z z ) ( co856 : lambda x y x ) co856 ( co824 : lambda
x x ) ( co856 co824 ) co856 ) ) ( lambda x y z z ) t f
t

Isn (Pair N0 N0) t f;
Isn ( Pair N0 N0 ) t f
( lambda x ( x ( lambda x y z z ) ( co856 : lambda x y x ) co856 ( co824 : lambda
x x ) ( co856 co824 ) co856 ) ) ( ( lambda x y z ( z x y ) ) ( co680 : lambda x y z y
) co680 ) t f
f
```

定義 5 裸の数同士を加算した結果、繰り上がりの数を返す term  $Add_1$  と、繰り上がりを考慮しない計算結果を返す term  $Add_2$  を次のように定義する。

$$Add_1 = \lambda xyz.x \quad (y(z\tilde{1}\tilde{1}\tilde{0})(z\tilde{1}\tilde{0}\tilde{0})\tilde{0}) \\ (y(z\tilde{1}\tilde{0}\tilde{0})\tilde{0}(z\tilde{0}\tilde{0}\tilde{-1})) \\ (y\tilde{0}(z\tilde{0}\tilde{0}\tilde{-1})(z\tilde{0}\tilde{-1}\tilde{-1}))$$

$$Add_2 = \lambda xyz.x \quad (y(z\tilde{1}\tilde{0}\tilde{1})(z\tilde{0}\tilde{1}\tilde{0})z) \\ (y(z\tilde{0}\tilde{1}\tilde{0})z(z\tilde{0}\tilde{-1}\tilde{0})) \\ (yz(z\tilde{0}\tilde{-1}\tilde{0})(z\tilde{-1}\tilde{0}\tilde{-1}))$$

$x$  : 繰り上がり

$y, z$  : 加算する 2 数

定義 6 簡単のため以下の *alias* を定義する。

$$\begin{array}{ll} if & \stackrel{\text{def}}{=} (( \\ then & \stackrel{\text{def}}{=} )( \\ else & \stackrel{\text{def}}{=} )( \\ endif & \stackrel{\text{def}}{=} )) \end{array}$$

これにより、次のように書く場合：

**if**  $M$  **then**  $N$  **else**  $L$  **endif**

$M$  が  $T$  の場合  $N$ 、 $F$  の場合  $L$  となる。

定義 7 入力された数が裸の数の場合は  $\tilde{0}$ 、 $\langle M, N \rangle$  の場合は  $M$  を返す term  $HDR$  を次のように定義する。

$$HDR = \lambda x. \\ \textbf{if } (Isn\ x) \textbf{ then } \tilde{0} \textbf{ else } x \ K \ \textbf{endif}$$

また、入力された数が裸の数の場合はそのまま、 $\langle M, N \rangle$  の場合は  $N$  を返す term  $FTR$  を次のように定義する。

$$FTR = \lambda x. \\ \textbf{if } (Isn\ x) \textbf{ then } x \ \textbf{else } x \ (K\ I) \ \textbf{endif}$$

定義 8 繰り上がりを考慮した加算を行う term  $Add^*$  を次のように定義する。

```
 $Add^* = \lambda xyz.$ 
if ( $Isn\ y$ ) then (
  if ( $Isn\ z$ ) then  $Pair\ (Add_1\ x\ y\ z)\ (Add_2\ x\ y\ z)$ 
  else (
     $Pair\ (Add^*\ (Add_1\ x\ (FTR\ y)\ (FTR\ z))\ (HDR\ y)\ (HDR\ z))$ 
     $(Add_2\ x\ (FTR\ y)\ (FTR\ z))$ 
  ) endif
) else (
   $Pair\ (Add^*\ (Add_1\ x\ (FTR\ y)\ (FTR\ z))\ (HDR\ y)\ (HDR\ z))$ 
   $(Add_2\ x\ (FTR\ y)\ (FTR\ z))$ 
) endif
```

$Add^*$  の繰り上がりを  $\tilde{0}$ としたものが 2引数をとつて加算を行う term  $Add$ となる。

$$Add = Add^* \tilde{0}$$

## lamalへの入力 (2)

```
macro if ((  
macro then );  
macro else );  
macro endif );  
HDR = lambda x  
  if (Isn x) then N0 else (x K) endif;  
FTR = lambda x  
  if (Isn x) then x else (x (K I)) endif;  
Add1 = lambda x y z  
  (x (y (z N1 N1 N0) (z N1 N0 N0) N0)  
   (y (z N1 N0 N0) N0 (z N0 N0 Nm1))  
   (y N0 (z N0 N0 Nm1) (z N0 Nm1 Nm1));  
Add2 = lambda x y z  
  (x (y (z N1 N0 N1) (z N0 N1 N0) z)  
   (y (z N0 N1 N0) z (z N0 Nm1 N0))  
   (y z (z N0 Nm1 N0) (z Nm1 N0 Nm1));  
_Add = lambda x y z  
  if (Isn y) then  
    if (Isn z) then (Pair (Add1 x y z) (Add2 x y z))  
    else (Pair (_Add (Add1 x (FTR y) (FTR z)) (HDR y) (HDR z))  
           (Add2 x (FTR y) (FTR z)))  
  endif  
  else (Pair (_Add (Add1 x (FTR y) (FTR z)) (HDR y) (HDR z))  
             (Add2 x (FTR y) (FTR z)))  
  endif;  
Add = _Add N0;
```

## 出力結果

```
(HDR (Add N1 N1)) 1 0 -1;  
...  
1  
  
(FTR (Add N1 N1)) 1 0 -1;  
...  
0  
  
(HDR (Add N1 Nm1)) 1 0 -1;  
...  
0  
  
(FTR (Add N1 Nm1)) 1 0 -1;  
...  
0  
  
(HDR (Add Nm1 Nm1)) 1 0 -1;  
...  
-1  
  
(FTR (Add Nm1 Nm1)) 1 0 -1;  
...  
0
```

定義 9 先頭に並んだ  $\tilde{0}$  を削除する term  $Tr$  を次のように定義する。

```
 $Tr = \lambda x.$ 
if ( $Isn (HDR\ x)$ ) then
    ( $HDR\ x$ )  $x$  ( $FTR\ x$ )  $x$ 
else
    if ( $Iz (Tr (HDR\ x))$ ) then
        ( $FTR\ x$ )
    else
         $Pair (Tr (HDR\ x)) (FTR\ x)$ 
    endif
endif
```

ここで  $Iz$  は引数が  $\tilde{0}$  の場合  $T$ 、それ以外の場合に  $F$  を返す次のような term。

```
 $Iz = \lambda x.$ 
if ( $Isn\ x$ ) then  $x$  ( $K\ I$ )  $K$  ( $K\ I$ )    else  $K\ I$ 
endif
```

### *lamal*への入力 (3)

```
Iz = lambda x  
  if (Isn x) then  
    x (K I) K (K I)  
  else  
    K I  
  endif;
```

```
Tr = lambda x  
  if (Isn (HDR x)) then  
    (HDR x) x (FTR x) x  
  else  
    if (Iz (Tr (HDR x))) then  
      (FTR x)  
    else  
      Pair (Tr (HDR x)) (FTR x)  
    endif  
  endif;
```

## 出力結果

```
(Isn (Tr (Pair N1 N0))) t f;
```

```
...
```

```
f
```

```
(Isn (Tr (Pair N0 N0))) t f;
```

```
...
```

```
t
```

```
(Isn (Tr (Pair N0 N1))) t f;
```

```
...
```

```
t
```

```
(Iz (Tr (Pair N0 N0))) t f;
```

```
...
```

```
t
```

```
(Iz (Tr (Pair N0 N1))) t f;
```

```
...
```

```
f
```

```
(Isn (Tr N0)) t f;
```

```
...
```

```
t
```

定義 10 先頭が  $\tilde{1}$  である数の各桁を桁借りを考慮して  $\tilde{1}$  ないし  $\tilde{0}$  に揃える *term*  $STD_1$  を次のように定義する。

```

 $\_STD = \lambda xy.$ 
if ( $I_{sn} y$ ) then
  if ( $Iz x$ ) then  $y$  else  $\tilde{0}$  endif
else
  if ( $Iz x$ ) then
    ( $FTR y$ ) ( $Pair (\_STD \tilde{0} (HDR y)) (FTR y)$ )
    ( $Pair (\_STD \tilde{0} (HDR y)) (FTR y)$ )
    ( $Pair (\_STD \tilde{-1} (HDR y)) \tilde{1}$ )
  else
    ( $FTR y$ ) ( $Pair (\_STD \tilde{0} (HDR y)) \tilde{0}$ )
    ( $Pair (\_STD \tilde{-1} (HDR y)) \tilde{1}$ )
    (( $FTR (HDR y)$ )
      ( $Pair (\_STD \tilde{0} (HDR y)) \tilde{1}$ )
      ( $Pair (\_STD \tilde{-1} (HDR y)) \tilde{0}$ )
      ( $Pair (\_STD \tilde{-1} (HDR y)) \tilde{1}$ ))
  endif
endif

```

$STD_1 = \_STD \tilde{0}$

## *lamal*への入力 (4)

```
_STD = lambda x y
  if (Isn y) then
    if (Iz x) then y else N0 endif
  else
    if (Iz x) then
      (FTR y) (Pair (_STD N0 (HDR y)) (FTR y))
      (Pair (_STD N0 (HDR y)) (FTR y))
      (Pair (_STD Nm1 (HDR y)) N1)
    else
      (FTR y) (Pair (_STD N0 (HDR y)) N0)
      (Pair (_STD Nm1 (HDR y)) N1)
      ((FTR (HDR y))
       (Pair (_STD N0 (HDR y)) N1)
       (Pair (_STD Nm1 (HDR y)) N0)
       (Pair (_STD Nm1 (HDR y)) N1))
    endif
  endif
```

$STD_1 = _STD\ N0$

## 出力結果

```
(STD1 N1) 1 0 -1;  
...  
1  
  
X = STD1 (Pair N1 N1);  
(HDR X) 1 0 -1;  
...  
1  
  
(FTR X) 1 0 -1;  
...  
1  
  
X = STD1 (Pair (Pair N1 N0) Nm1);  
(HDR (HDR X)) 1 0 -1;  
...  
0  
  
(FTR (HDR X)) 1 0 -1;  
...  
1  
  
(FTR X) 1 0 -1;  
...  
1  
  
(Isn (HDR X)) t f;  
...  
f
```

## **ToDo 11 これからの課題**

1. 四則演算の定義

2. 数表現の正規化

3. *etc* . . .