千葉大学大学院　自然科学研究科

直観主義述語論理から体系 BCK$\beta\eta$ への埋め込み問題

平成 16 年 10 月 28 日

数学・情報数理学 専攻

内藤昭宏

1 体系 $BCK\beta\eta$

λ-term に Ξ を加えた体系である $BCK\beta\eta$ は以下のように定義される。

定義 1.1. *(λ-term)*

- 個体変数、定数は$term$である。
- α,βが$term$ならば$(\alpha\beta)$は$term$である。
- αが$term$ならば$(\lambda x.\alpha)$は$term$である。

定義 1.2. *(βη-equality)*

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha & =_{\beta\eta} & \alpha & \\
\lambda x.\alpha & =_{\beta\eta} & \lambda y.[y/x]\alpha & (y\text{は}\alpha\text{に自由に現れない}) \\
(\lambda x.\alpha)\beta & =_{\beta\eta} & [\beta/x]\alpha & \\
\lambda x.\alpha x & =_{\beta\eta} & \alpha & (x\text{は}\alpha\text{に自由に現れない}) \\
\alpha =_{\beta\eta} \beta & \Longrightarrow & \gamma\alpha =_{\beta\eta} \gamma\beta & \\
\alpha =_{\beta\eta} \beta & \Longrightarrow & \alpha\gamma =_{\beta\eta} \beta\gamma & \\
\alpha =_{\beta\eta} \beta & \Longrightarrow & \lambda x.\alpha =_{\beta\eta} \lambda x.\beta & \\
\alpha =_{\beta\eta} \beta,\quad \beta =_{\beta\eta} \gamma & \Longrightarrow & \alpha =_{\beta\eta} \gamma & \\
\alpha =_{\beta\eta} \beta & \Longrightarrow & \beta =_{\beta\eta} \alpha &
\end{array}
$$

体系 $BCK\beta\eta$ の論理式は λ-term のことであり、可算個の定数を含み, その中には「Ξ, i, c」がある。体系 $BCK\beta\eta$ の推論規則は次の 3 つとなる。また、一度に落とせる仮定は高々 1 つである。 すなわち、数字 k は高々 1ヶ所にしか現われない。

■ Ξ introduction (Ξi)

$$
\frac{\begin{array}{c} k \\ \alpha x \\ \Sigma \\ \beta x \end{array}}{\Xi\alpha\beta}\ k(\Xi i)
$$

x は α,β 及び落ちていない仮定に自由に現れない。

■ Ξ elimination (Ξe)

$$
\frac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \Xi\alpha\beta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \alpha\gamma\end{array}}{\beta\gamma}\ (\Xi e)
$$

■ *equality*$(\beta\eta)$

$$
\begin{array}{c}\Sigma \\ \alpha \\ \hline \beta\end{array}\ (\beta\eta) \qquad if \qquad \alpha =_{\beta\eta} \beta
$$

項 $\Xi\alpha\beta$ の直観的な意味は $\forall x(\alpha x \supset \beta x)$ である。項 ix の意味は x は個体である，項 $\alpha =!\alpha$ の意味は α は命題であるである。

この言語は表現力が豊かで多くの論理記号や述語が省略記号として定義できる。以下には必要なものだけを列挙する

$$\begin{array}{rcl} \alpha \supset \beta & \equiv & \Xi(\mathbf{K}\alpha)(\mathbf{K}\beta),\ \text{where } \mathbf{K} \equiv \lambda xy.x; \\ \top & \equiv & \Xi ii; \\ \forall x\alpha & \equiv & \Xi(\mathbf{K}\top)(\lambda x.\alpha); \\ \bot & \equiv & \forall xx; \\ \alpha = \beta & \equiv & \Xi(\lambda x.x\alpha)(\lambda x.x\beta); \\ !\alpha & \equiv & \top = \alpha. \end{array}$$

定理 1.3. 上記の省略記号を用いて以下の推論規則が許される。

■ *Implication introduction* ($\supset i$)

$$\frac{\begin{array}{c} k \\ \alpha \\ \Sigma \\ \beta \end{array}}{\alpha \supset \beta}\ k(\supset i)$$

■ *Implication elimination* ($\supset e$)

$$\frac{\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \alpha \supset \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} \Sigma_2 \\ \alpha \end{array}}{\beta}\ (\supset e)$$

■ *Universal quantifier introduction* ($\forall$ *i*)

$$\frac{\begin{array}{c} \Sigma \\ \alpha \end{array}}{\forall x\alpha}\ (\forall i)$$

x は落ちていない仮定に自由に現れない。

■ *Universal quantifier elimination* ($\forall$ *e*)

$$\frac{\begin{array}{c} \Sigma \\ \forall x\alpha \end{array}}{(\lambda x.\alpha)\beta}\ (\forall e)$$

■ *Ex falso quodibet* (*q*)

$$\frac{\bot}{\alpha}\ (q)$$

Proof. $(\supset \mathrm{i})$ について証明する。

$$\dfrac{\begin{array}{c} k \\ \dfrac{K\alpha x}{\alpha}\ (\beta\eta) \\ \Sigma \\ \dfrac{\beta}{K\beta x}\ (\beta\eta) \end{array}}{\Xi(K\alpha)(K\beta)}\ k(\Xi i)$$

□

また「$\alpha = \beta$」については次の推論規則が許される。

$$\dfrac{\begin{array}{c} k \\ \alpha = \beta \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{(\alpha = \beta) \supset \gamma}\ k(=\supset \mathrm{i}).$$

ただし, $(=\supset \mathrm{i})$ において仮定はいくつでも落とせる。

定理 1.4. $!\alpha$ について以下の推論規則が許される。

■ *! elimination*

$$\dfrac{!\alpha}{\alpha}\ (!e)$$

■ *! implication introduction*

$$\dfrac{\begin{array}{c} k \\ !\alpha \\ \Sigma \\ \beta \end{array}}{!\alpha \supset \beta}\ k(! \supset i)$$

$(! \supset i)$ において仮定はいくつでも落とせる。

Γ を論理式の列としたとき、Γ に含まれる論理式を落ちていない仮定とし α に至る $BCK\beta\eta$ の推論図があるとき

$$\Gamma \ \vdash_{\beta\eta} \ \alpha$$

と書く。 仮定にない論理式が Γ に含まれていてもよい。ただし $BCK\beta\eta$ では、一般に *contraction* がきかないので、同じ仮定を 2 回以上使った場合は、その論理式は Γ の中に使った分だけ含まれている。

また α に含まれる自由変数全体の集合を $FV(\alpha)$ とする。

2 NJ の $BCK\beta\eta$ への埋め込み

NJ の論理式から $BCK\beta\eta$ の論理式への変換を考え、 NJ で証明出来る論理式 α に関して、 α を変換したものが $BCK\beta\eta$ で証明可能となることから直観主義論理 NJ が $BCK\beta\eta$ に埋め込めることを示す。

まずは、

- 関数記号が 2 変数関数記号 f のみ
- 述語記号が 2 変数述語記号 p のみ

からなる NJ について考える。

定義 2.1. $BCK\beta\eta$ において以下の論理式を並べた列を Δ とする。

$$\perp =!(\perp)$$

$$ic$$

$$!(\forall x(ix =!(ix)))$$

$$!(\forall x\forall y(i(fxy)))$$

$$!(\forall x\forall y(pxy =!(pxy)))$$

$$!(\forall x\forall y(\forall z(xz =!(xz)) \supset \forall z(yz =!(yz)) \supset (\Xi xy) =!(\Xi xy)))$$

定義 2.2. NJ の論理式 α から $BCK\beta\eta$ の論理式 α° を以下のように定義する。

$$\begin{array}{rll} \alpha^\circ & \equiv_{def} & \alpha \quad\quad if \quad\quad \alpha\ is\ atom. \\ (\alpha \supset \beta)^\circ & \equiv_{def} & \alpha^\circ \supset \beta^\circ \\ (\forall x\alpha)^\circ & \equiv_{def} & \Xi i(\lambda x.\alpha^\circ)(= \forall x(ix \supset \alpha^\circ)). \end{array}$$

補題 2.3.

$$FV(\alpha^\circ) = FV(\alpha)$$

$$FV(!\alpha) = FV(\alpha)$$

Proof. α の長さに関する帰納法。 □

補題 2.4. *(contraction)*

$$!\alpha, !\alpha, \Gamma \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \beta$$

のとき、

$$!\alpha, \Gamma \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \beta$$

Proof. $(=\supset i)$ による。 $\square$

補題 2.5.

$$[t/x]\alpha^\circ \quad =_{\beta\eta} \quad ([t/x]\alpha)^\circ$$

Proof. α の長さに関する帰納法。

■ α が atom のとき

$$\begin{aligned} [t/x]\alpha^\circ &=_{\beta\eta} [t/x]\alpha \\ ([t/x]\alpha)^\circ &=_{\beta\eta} [t/x]\alpha \end{aligned}$$

■ α が $\beta \supset \gamma$ のとき
帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} [t/x]\beta^\circ &=_{\beta\eta} ([t/x]\beta)^\circ \\ [t/x]\gamma^\circ &=_{\beta\eta} ([t/x]\gamma)^\circ \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} [t/x]\alpha^\circ &=_{\beta\eta} [t/x]\beta^\circ \supset [t/x]\gamma^\circ \\ ([t/x]\alpha)^\circ &=_{\beta\eta} ([t/x]\beta \supset [t/x]\gamma)^\circ \\ &=_{\beta\eta} ([t/x]\beta)^\circ \supset ([t/x]\gamma)^\circ \end{aligned}$$

より

$$[t/x]\alpha^\circ \quad =_{\beta\eta} \quad ([t/x]\alpha)^\circ$$

■ α が $\forall x\beta$ のとき

$$\begin{aligned} [t/x]\alpha^\circ &=_{\beta\eta} [t/x](\forall x\beta)^\circ \\ &=_{\beta\eta} (\forall x\beta)^\circ \\ ([t/x]\alpha)^\circ &=_{\beta\eta} ([t/x](\forall x\beta))^\circ \\ &=_{\beta\eta} (\forall x\beta)^\circ \end{aligned}$$

■ α が $\forall y\beta, (y \neq x)$ のとき

帰納法の仮定から

$$\begin{aligned} [z/y]\beta^\circ &=_{\beta\eta} ([z/y]\beta)^\circ \\ [t/x]([z/y]\beta)^\circ &=_{\beta\eta} ([t/x][z/y]\beta)^\circ \end{aligned}$$

ただし z は new-variable。
つまり

$$[t/x][z/y]\beta^\circ =_{\beta\eta} ([t/x][z/y]\beta)^\circ$$

ここで

$$\begin{aligned} [t/x]\alpha^\circ &=_{\beta\eta} [t/x](\Xi i(\lambda y.\alpha^\circ)) \\ &=_{\beta\eta} [t/x](\Xi i(\lambda z.[z/y]\beta^\circ)) \\ &=_{\beta\eta} \Xi i(\lambda z.[t/x][z/y]\beta^\circ) \\ ([t/x]\alpha)^\circ &=_{\beta\eta} ([t/x](\forall z[z/y]\beta))^\circ \\ &=_{\beta\eta} (\forall z[t/x][z/y]\beta)^\circ \\ &=_{\beta\eta} \Xi i(\lambda z.([t/x][z/y]\beta)^\circ) \end{aligned}$$

より

$$[t/x]\alpha^\circ =_{\beta\eta} ([t/x]\alpha)^\circ$$

□

定理 2.6. NJ の論理式 α に関して、

$$\Delta \vdash_{\beta\eta} \alpha^\circ =!(\alpha^\circ)$$

Proof. α の長さに関する帰納法。

■ αが$\bot$ のとき
Δ に含まれているので、自明。

■ α が atom のとき
$\alpha \equiv \alpha^\circ \equiv pt_1t_2$ となる。
このとき

$$\frac{!(\forall x\forall y(pxy =!(pxy)))}{pt_1t_2 =!(pt_1t_2)}\ (!e)(\forall e)$$

■ $\alpha \equiv \beta \supset \gamma$ のとき
帰納法の仮定より

$$\Delta \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \beta^\circ =!(\beta^\circ)$$
$$\Delta \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \gamma^\circ =!(\gamma^\circ)$$

である。

よって

$$\cfrac{\cfrac{!(\forall x \forall y(\forall z(xz =!(xz)) \supset \forall z(yz =!(yz)) \supset (\Xi xy) =!(\Xi xy)))}{\forall z(K\beta^\circ z =!(K\beta^\circ z)) \supset \forall z(K\gamma^\circ z =!(K\gamma^\circ z)) \supset \Xi(K\beta^\circ)(K\gamma^\circ) =!(\Xi(K\beta^\circ)(K\gamma^\circ))}\ (!e)(\forall e)}{\forall z(\beta^\circ =!(\beta^\circ)) \supset \forall z(\gamma^\circ =!(\gamma^\circ)) \supset (\beta^\circ \supset \gamma^\circ) =!(\beta^\circ \supset \gamma^\circ)}\ (\beta\eta)$$

これを Π とする。

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \forall z(\beta^\circ =!(\beta^\circ)) \supset \forall z(\gamma^\circ =!(\gamma^\circ)) \supset (\beta^\circ \supset \gamma^\circ) =!(\beta^\circ \supset \gamma^\circ)\end{matrix} \quad \forall z(\beta^\circ =!(\beta^\circ))}{\forall z(\gamma^\circ =!(\gamma^\circ)) \supset (\beta^\circ \supset \gamma^\circ) =!(\beta^\circ \supset \gamma^\circ)}\ (\supset e) \quad \forall z(\gamma^\circ =!(\gamma^\circ))}{\beta^\circ \supset \gamma^\circ =!(\beta^\circ \supset \gamma^\circ)}\ (\supset e)$$

■ $\alpha \equiv \forall x\beta$ のとき

帰納法の仮定より

$$\Delta \quad \vdash_{\beta\eta} \quad ([u/x]\beta)^\circ =!([u/x]\beta)^\circ$$

ここで、補題 2.5より

$$[u/x]\beta^\circ =_{\beta\eta} ([u/x]\beta)^\circ$$
$$![u/x]\beta^\circ =_{\beta\eta} !([u/x]\beta)^\circ$$

である。

よって

$$\cfrac{\cfrac{!(\forall x \forall y(\forall z(xz =!(xz)) \supset \forall z(yz =!(yz)) \supset (\Xi xy) =!(\Xi xy)))}{\forall z(iz =!(iz)) \supset \forall z((\lambda x.\beta^\circ)z =!((\lambda x.\beta^\circ)z)) \supset \Xi i(\lambda x.\beta^\circ) =!(\Xi i(\lambda x.\beta^\circ))}\ (!e)(\forall e) \quad \forall z(iz =!(iz))}{\cfrac{\forall z((\lambda x.\beta^\circ)z =!((\lambda x.\beta^\circ)z)) \supset \Xi i(\lambda x.\beta^\circ) =!(\Xi i(\lambda x.\beta^\circ))}{\forall z([z/x]\beta^\circ =!([z/x]\beta^\circ)) \supset (\forall x\beta^\circ) =!(\forall x\beta^\circ)}\ (\beta\eta)}\ (\supset e)$$

これを Π とする。

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \forall z([z/x]\beta^\circ =!([z/x]\beta^\circ)) \supset (\forall x\beta)^\circ =!(\forall x\beta)^\circ\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{([z/x]\beta)^\circ =!([z/x]\beta)^\circ}{[z/x]\beta^\circ =!([z/x]\beta^\circ)}\,(\beta\eta)}{\forall z([z/x]\beta^\circ =!([z/x]\beta^\circ))}\,(\forall i)}{(\forall x\beta)^\circ =!(\forall x\beta)^\circ}\,(\supset e)
$$

□

定理 2.6 と補題 2.4 を用いると以下の補題が証明できる。

補題 2.7. *(contraction2)*

$$\Delta, \alpha^\circ, \alpha^\circ, \Gamma \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \beta$$

のとき、

$$\Delta, \alpha^\circ, \Gamma \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \beta$$

定理 2.8.

$$\Gamma \quad \vdash_{NJ} \quad \alpha$$

のとき、 $x_1, \dots, x_n$ を適当な変数の列とすると

$$\Delta, ix_1, \dots, ix_n, \Gamma^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \alpha^\circ$$

ここで Γ° は Γ に含まれる仮定 β に関して β° としたもの。また通常 NJ では Γ には重複はないのだが、ここでは証明を簡単にするため、 Γ には使った分だけ仮定が含まれているものとする。

Proof. NJ での推論図の長さに関する帰納法。

■ 推論図の長さが 1 のとき

α は Γ に含まれるので

$$\Gamma \quad \vdash_{NJ} \quad \alpha$$

より

$$\Gamma^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \alpha^\circ$$

よって

$$\Delta, ix_1, \dots, ix_n, \Gamma^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \alpha^\circ$$

■ NJ で最後の推論規則が $(\supset e)$ のとき

$$\frac{\beta \supset \alpha \quad \beta}{\alpha}\ (\supset e)$$

となっている。このとき帰納法の仮定より

$$\begin{array}{rcl} \Delta, ix_1, \ldots, ix_m, \Gamma_1^\circ & \vdash_{\beta\eta} & (\beta \supset \alpha)^\circ \\ \Delta, iy_1, \ldots, iy_l, \Gamma_2^\circ & \vdash_{\beta\eta} & \beta^\circ \end{array}$$

ただし Γ_1, Γ_2 を並べたものが Γ
したがって

$$\Delta, ix_1, \ldots, ix_m, iy_1, \ldots, iy_l, \Gamma_1^\circ, \Gamma_2^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \alpha^\circ$$

■ NJ で最後の推論規則が $(\supset i)$ のとき

$$\frac{\begin{array}{c} k \\ \beta \\ \Pi \\ \gamma \end{array}}{\beta \supset \gamma}\ k(\supset i)$$

となっている。このとき帰納法の仮定より

$$\Delta, ix_1, \ldots, ix_n, \Gamma^\circ, \beta^\circ, \cdots, \beta^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \gamma^\circ$$

よって補題 2.7 より

$$\Delta, ix_1, \ldots, ix_n, \Gamma^\circ, \beta^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \gamma^\circ$$

したがって

$$\Delta, ix_1, \ldots, ix_n, \Gamma^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \beta^\circ \supset \gamma^\circ$$

■ NJ で最後の推論規則が $(\forall i)$ のとき

$$\frac{\beta}{\forall x \beta}$$

となっている。(x は落ちていない仮定に現れない)。
このとき帰納法の仮定より

$$\Delta, ix_1, \ldots, ix_n, \Gamma^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \beta^\circ$$

補題 2.3 より Γ° に x は自由に現れないので、

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} k \\ ix \\ \Sigma \\ \beta^\circ \end{matrix}}{(\lambda x.\beta^\circ)x}\ (\beta\eta)}{\Xi i(\lambda x.\beta^\circ)}\ k(\Xi i)$$

■ NJ で最後の推論規則が $(\forall e)$ のとき

$$\frac{\forall x\beta}{[t/x]\beta}$$

となっている。 このとき帰納法の仮定より

$$\Delta, ix_1, \ldots, ix_n, \Gamma^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad (\forall x\beta)^\circ$$

よって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Xi i(\lambda x.\beta^\circ) \quad it}{(\lambda x.\beta^\circ)t}\ (\Xi e)}{[t/x]\beta^\circ}\ (\beta\eta)}{([t/x]\beta)^\circ}\ (\beta\eta)$$

ここで $t \equiv y$ (y は変数) のときは左辺に iy を加えてやればよい。
$t \equiv ft_1t_2$ のときは

$$\frac{!(\forall x\forall y(i(fxy)))}{i(ft_1t_2)}\ (!e)(\forall e)$$

より

$$\Delta \quad \vdash_{\beta\eta} \quad it$$

が示せる。よって

$$\Delta, ix_1, \ldots, ix_m, \Gamma^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad ([t/x]\beta)^\circ$$

■ NJ で最後の推論規則が (q) のとき

$$\frac{\perp}{\alpha}$$

となっている。 このとき帰納法の仮定より

$$\Delta, \Gamma^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \perp$$

(q) より

$$\Delta, ix_1, \ldots, ix_n, \Gamma^\circ \quad \vdash_{\beta\eta} \quad \alpha^\circ$$

□

3　参考

$http : //www.math.s.chiba - u.ac.jp/\ komori/papers/LogicSemi/$

の komori6.dvi

$http : //www.math.s.chiba{-}u.ac.jp/\ komori/masters_thesis/2003/takayama/takayama.dvi$