中間命題論理

東京工業大学
松田 直祐
matsuda.naosuke@gmail.com
ラムダ計算と論理のセミナー（草津セミナーハウス 2015.9）

概 要

中間論理は，直観主義論理と古典論理の間にある論理の総称である．この資料では，中間命題論理の性質をいくつか紹介し，鹿島 [4]・古森 [5] によって与えられた中間命題論理に関する興味深い予想を紹介する．

参考文献

[1] DM Gabbay, D Skvortsov, and V Sheftman. Quantification in nonclassical logic studies in logic and the foundation of mathematics, vol. 153, 2009.

[2] Dov M Gabbay. *Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic*, volume 148. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] VA JANKOV. Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi. *Soviet Mathematics*, 9:806–807, 1968.

[4] Ryo Kashima. Problems on axiomatization of intermediate propositional logics. In *Proceedings of the 39th MLG meeting at Gamagori, Japan*, pages 59–62, 2005.

[5] Yuichi Komori. Independent axiom systems of minimal formulas for classical logic. In *Proceedings of the 39th MLG meeting at Gamagori, Japan*, pages 56–58, 2005.

[6] Dirk Van Dalen. Intuitionistic logic. In *Handbook of philosophical logic*, pages 225–339. Springer, 1986.

以下の議論では，論理記号として $\bot, \to, \wedge, \vee$ を持つ命題論理を扱う．つまり，論理式の全体集合 Fml は，命題変数の可算集合 P を基に以下のように定義される．

$$\alpha, \beta \in \mathrm{Fml} ::= p \mid \bot \mid (\alpha \to \beta) \mid (\alpha \wedge \beta) \mid (\alpha \vee \beta) \qquad p \in \mathrm{P}$$

命題変数は p, q, r 等を用いて表し，論理式は $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$ 等を用いて表す．論理記号の結合の強さは $\neg, \wedge, \vee, \to$ の順で強く，この約束の下論理式中の括弧を省略することがある．また，$(\alpha \to (\beta \to \gamma))$ を $\alpha \to \beta \to \gamma$ と書き，$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$ や $((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$ を $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma, \alpha \vee \beta \vee \gamma$ と書くことがある．従って，例えば

$$((\neg\alpha) \to (\beta \to (\gamma \wedge \delta)))$$

を

$$\neg\alpha \to \beta \to \gamma \wedge \delta$$

と書く．$\bot \to \bot$ を $\top$ と書き，$\alpha \to \bot$ を $\neg\alpha$ と書くことがある．

α 中に現れる命題変数 $p_1, \ldots, p_n$ に $\beta_1, \ldots, \beta_n$ を同時に代入して得られる論理式を $[\beta_1/p_1, \ldots, \beta_n/p_n]\alpha$ と書く．例えば，$[\alpha \wedge \beta/p, p/q](p \to q \to p)$ は $\alpha \wedge \beta \to p \to \alpha \wedge \beta$ という論理式となる．

その他の基本的概念の説明などは，最終節に簡単な紹介が書いてあるので，適宜参照ください（より詳しくは，例えば [1, 2, 6] 等を参照）．

1　中間論理の導入

唐突ではあるが，はじめに古典論理と直観主義論理の証明システムを与えておく．

定義 1.1 (古典論理と直観主義論理のヒルベルト流証明システム)．**直観主義論理**の証明システム **HJ** は $(H1)$〜$(H9)$ を公理型（axiom scheme）とし（つまり，$(H1)$〜$(H9)$ の命題変数を任意の論理式で置き換えた論理式を公理と認め），modus ponens (MP) を推論規則とする証明システムである．また，**古典論理**の証明システム **HK** は **HJ** に $(H10)$ を公理型として加えることで

得られる．

$$
\begin{aligned}
&(H1)\ (p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r \\
&(H2)\ p \to q \to p \\
&(H3)\ p \land q \to p \\
&(H4)\ p \land q \to q \\
&(H5)\ p \to q \to p \land q \\
&(H6)\ (p \to r) \to (q \to r) \to (p \lor q \to r) \\
&(H7)\ p \to p \lor q \\
&(H8)\ q \to p \lor q \\
&(H9)\ \bot \to p \\
&(H10)\ ((p \to q) \to p) \to p
\end{aligned}
$$

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \alpha}{\beta}\ (\mathrm{MP})$$

論理式 α が証明システム S で証明可能である時，$S \vdash \alpha$ と書く．

上の定義では，古典論理の証明システムは **HJ** に公理型 $(H10)$ を加えることで与えられた．しかし，$(H10)$ の代わりに

$$\neg\neg p \to p$$

や，

$$\neg p \lor p$$

といったものを公理型に加えても，同等の証明システム（つまり，証明できる論理式が同じ証明システム）が得られることが知られている．

しかし，直観主義論理で証明できない（かつ古典論理で証明できる）論理式を加えた時，常に **HK** と同等のシステムになるわけではない．例えば **HJ** に

$$((p \to (((q \to r) \to q) \to q) \to p) \to p$$

という形の公理型を加えると **HJ** より真に強く **HK** より真に弱い証明システムが出来上がる．

さて，ここで以下のような自然な疑問が生じる．

- 古典論理と直観主義論理の間にはどれほどの差があるのか
- 古典論理と直観主義論理の間にはどのような「論理」が存在するのか
- 古典論理と直観主義論理の間には「論理」はどれだけ存在するのか

このような問いを考えるためには，まずは「論理とは何か？」という問いに答えなければならない．

自然に考えるならば,「古典論理と直観主義論理の間にある論理」とは,「**HJ** に古典論理で証明可能な論理式を公理としていくつか付け加えた証明システムによって与えられる論理」である：

定義 1.2 (超直観主義論理，中間論理)**.** A を論理式集合とし，証明システム S に A に含まれる論理式を公理型として加えた証明システムを $S \oplus A$ と書くことにする．

ある論理式集合 A に対し，証明システム $\mathbf{HJ} \oplus A$ で公理化された論理を**超直観主義論理**と呼ぶ．また，A に属する論理が全て古典論理で証明可能な時，この論理は**中間論理**と呼ばれる．

「論理」を捉えるためのもう一つの自然な考え方は，その論理で証明できる論理式全体の集合をもって，論理を定義する方法である [1] ．例えば，古典論理というものを $\mathrm{CL} = \{\alpha \mid \mathbf{HK} \vdash \alpha\}$ という集合と同一視し，直観主義論理というものを $\mathrm{IL} = \{\alpha \mid \mathbf{HJ} \vdash \alpha\}$ という集合と同一視する．

では，論理式の集合 L が，ある超直観主義論理（または中間論理）で証明可能な論理式全体と一致しているのはどのような時であろうか？次の命題がその答えである．

命題 1.3. 論理式集合 L に対し，以下の二つの条件は同値．

1. ある $A \subseteq \mathrm{Fml}$ に対し，$L = \{\alpha \mid \mathbf{HJ} \oplus A \vdash \alpha\}$ となる．
2. L が $(\star 1)$-$(\star 3)$ を満たす．
   - $(\star 1)$ L が modus ponens について閉じている：$\alpha \to \beta \in L$ かつ $\alpha \in L$ ならば $\beta \in L$.
   - $(\star 2)$ L が命題変数への論理式の代入操作について閉じている：$\alpha \in L$ ならば $[\beta_1/p_1, \ldots, \beta_n/p_n]\alpha \in L$.
   - $(\star 3)$ $\mathrm{IL} \subseteq L$.

Proof.

$(1 \Rightarrow 2)$ $\mathbf{HJ} \oplus A \vdash \alpha \to \beta$ かつ $\mathbf{HJ} \oplus A \vdash \alpha$ ならば $\mathbf{HJ} \oplus A \vdash \beta$ は，$\mathbf{HJ} \oplus A$ が modus ponens を規則として持っているので明らか．また，$\mathbf{HJ} \oplus A \vdash \alpha$ ならば $\mathbf{HJ} \oplus A \vdash [\beta_1/p_1, \ldots, \beta_n/p_n]\alpha$ が，$\mathbf{HJ} \oplus A \vdash \alpha$ の証明図のサイズに関する帰納法で確かめられる．最後に，$\mathbf{HJ} \vdash \alpha$ ならば明らかに $\mathbf{HJ} \oplus A \vdash \alpha$ である．

$(2 \Rightarrow 1)$ $L = \{\alpha \mid \mathbf{HJ} \oplus L \vdash \alpha\}$ である．

[1] 証明できる論理式が全く同じでも異なる論理たちも存在する．従って，場合によってはこのような捉え方は「論理」の定義はふさわしくない時もある．

□

命題 1.4. 論理式集合 L に対し，以下の二つの条件は同値．

1. ある $A \subseteq \mathrm{CL}$ に対し，$L = \{\alpha \mid \mathbf{HJ} \oplus A \vdash \alpha\}$ となる．
2. L が上の $(\star 1)$-$(\star 3)$ と以下の $(\star 4)$ を満たす．

   $(\star 4)$ $L \subseteq \mathrm{CL}$.

Proof. 上と同様． □

従って，証明可能な論理式の集合をその論理と同一視するという立場から，超直観主義論理や中間論理を以下のように再定義できる．

定義 1.5. 論理式集合 L が,

$(\star 1)$ L が modus ponens について閉じている：$\alpha \to \beta \in L$ かつ $\alpha \in L$ ならば $\beta \in L$.

$(\star 2)$ L が命題変数への論理式の代入操作について閉じている：$\alpha \in L$ ならば $[\beta_1/p_1, \ldots, \beta_n/p_n]\alpha \in L$.

$(\star 3)$ $\mathrm{IL} \subseteq L$.

$(\star 4)$ $L \subseteq \mathrm{CL}$.

の条件を満たすとき，L は中間論理と呼ばれる．また，$(\star 1)$-$(\star 3)$ を満たすものは超直観主義論理と呼ばれる．

補足 1.6. 定義から，$\mathrm{IL}, \mathrm{CL}, \mathrm{Fml}$ は超直観主義論理である．

このような考えを導入しておくと，論理間の強さを比べる時などに便利である．また，次のような主張を述べるのにも適している．

補題 1.7. $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を中間論理のクラスとする．この時，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ は中間論理となる．この $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ は，全ての L_λ に包含されるような最大の中間論理である．

さて，この節の初めに書かれた問いを,「中間論理」という言葉を用いて述べなおすと以下のような問いになる．

- どのような性質を持つ中間論理が存在するであろうか？
- 中間論理はどのぐらい存在するであろうか？

以下，これらの問いに対して考察を与えていく．

上で中間論理とともに超直観主義論理なる概念を導入したが，ここで一つ注意を与えておく．実は超直観主義論理の中で中間論理でないものは，論理式全体の集合 Fml のみであることがわかるのである．

定理 1.8. 論理 L が超直観主義論理であって，かつ中間論理でなければ，$L = \mathrm{Fml}$ である．

Proof. 仮定より L の中に $\mathbf{HK} \nvdash \varphi$ なる φ が存在する．従って，真理値関数 h があって，$f(\varphi) = \mathbf{false}$ となる [2]．さて，φ の中の命題変数のうち，$h(p) = \mathbf{true}$ なるものを $\top$ で置き換え，$h(p) = \mathbf{false}$ なるものを $\bot$ で置き換えてえられる論理式を φ' とする．φ' の作り方から，φ がトートロジであることがわかる．．従って $\mathbf{HK} \vdash \neg\varphi'$ が成り立ち，ここから $\mathbf{HJ} \vdash \neg\neg\neg\varphi'$ が得られる．一方，φ' は φ から命題変数への論理式の代入を用いて得られるので，$\varphi' \in L$．これを用いて $\neg\neg\varphi' \in L$ を得る．これらの結果を合わせると，$(\neg\neg\varphi') \wedge \neg(\neg\neg\varphi') \in L$ が得られる．任意の論理式 α に対し，$(\neg\neg\varphi') \wedge \neg(\neg\neg\varphi') \to \alpha \in \mathrm{IL} \subseteq L$ なので，$\alpha \in L$ となる． $\square$

2　クリプキ意味論・代数的意味論との関係

上の議論では，$A \subseteq \mathrm{CL}$ に対し $\{\alpha \mid \mathbf{HJ} \oplus A \vdash \alpha\}$ という中間論理を作った．では，この他に自然な方法で中間論理を作ってみせることは出来るだろうか．一つの自然な方法はクリプキ意味論や代数的意味論 [3] を利用することで与えられる．

定理 2.1.

(1) クリプキフレーム $\mathcal{F}$ に対し，$L_K(\mathcal{F}) = \{\alpha \mid \mathcal{F} \models \alpha\}$ は中間論理．

(2) クリプキフレームのクラス $\mathbb{F}(\neq \emptyset)$ に対し，$L_K(\mathbb{F}) = \{\alpha \mid$ 任意の $\mathcal{F} \in \mathbb{F}$ に対し $\mathcal{F} \models \alpha\}$ は中間論理．

Proof.

(1) まず，クリプキモデルの性質から

- $\mathcal{F} \models \alpha \to \beta$ かつ $\mathcal{F} \models \alpha$ ならば $\mathcal{F} \models \beta$
- $\mathcal{F} \models \alpha$ ならば $\mathcal{F} \models [\beta_1/p_1, \ldots, \beta_n/p_n]\alpha$

は明らかなので，$L_K(\mathcal{F})$ が modus ponens や論理式の代入について閉じていることが言える．また，直観主義論理のクリプキ完全性から $\alpha \in \mathrm{IL}$ なら $\mathcal{F} \models \alpha$ であるので，$\mathrm{IL} \subseteq L_K(\mathcal{F})$ は明らか．従って，この時点で $L_K(\mathcal{F})$ が超直観主義論理であることがわかる．ここで，すべての α に対して $\mathcal{F} \models \alpha$ となることはないので，$L_K(\mathcal{F}) \neq \mathrm{Fml}$．従って，$L_K(\mathcal{F})$ は中間論理となっている．

[2] 古典論理の意味論は 0.2 小節を参照．
[3] クリプキモデルの定義は 0.3 小節，ハイティング代数やブール代数の定義は 0.4 小節に書かれている．

(2) $L_K(\mathbb{F}) = \bigcap_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}} L_K(\mathcal{F})$ である．従って，補題 1.7 により $L_K(\mathbb{F})$ は中間論理である．

□

定理 2.2.

(1) ハイティング代数 $\mathcal{A}(\neq\emptyset)$ に対し，$L_H(\mathcal{A}) = \{\alpha \mid \mathcal{A} \models \alpha\}$ は中間論理．

(2) ハイティング代数のクラス $\mathbb{A}$ に対し，$L_H(\mathbb{A}) = \{\alpha \mid$ 任意の $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ に対し $\mathcal{A} \models \alpha\}$ は中間論理．

Proof. 上と同様． □

補足 2.3. ハイティング代数のクラス $\mathbb{A}$ に対し，$\mathbb{A}$ に属するハイティング代数が全てブール代数ならば $L_H(\mathbb{A}) = \mathrm{CL}$．

ハイティング代数と中間論理の関係は特に深く，以下が成り立つ．

定理 2.4. 任意の中間論理 L に対し，$L = L_H(\mathcal{A})$ なるハイティング代数のクラス $\mathcal{A}$ が存在する．

Proof. Fml に同値関係 $\sim$ を

$$\alpha \sim \beta \ :\Longleftrightarrow\ \mathbf{HJ} \oplus L \vdash \alpha \to \beta \text{ かつ } \mathbf{HJ} \oplus \beta \to \alpha$$

で定める．そして，Fml/ $\sim$ 上に関係 $\prec$ を

$$[\alpha] \prec [\beta] \ :\Longleftrightarrow\ \mathbf{HJ} \oplus L \vdash \alpha \to \beta$$

で定めると，$\prec$ は Fml/ $\sim$ 上の well-defined な順序関係となる．すると，$\langle \mathrm{Fml}/\sim, \prec\rangle$ は $[\top]$ を最小元，$[\bot]$ を最大元とするハイティング代数となり，上限 $\sqcup$・下限 $\sqcap$・相対補元 $\triangleright$ はそれぞれ

$$[\alpha] \sqcup [\beta] = [\alpha \vee \beta]$$

$$[\alpha] \sqcap [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$$

$$[\alpha] \triangleright [\beta] = [\alpha \to \beta]$$

と計算できる．この時，この代数（L のリンデンバウム代数）に対して $L = L_H(\mathcal{A})$ が示せる． □

3 中間論理全体のなす構造

中間論理と呼ばれる論理たちの成す構造は，どのようなものであろうか？つまり，I を中間論理全体の集合とした時，$\mathcal{I} = \langle I, \subseteq\rangle$ という構造はどのような性質を持つのだろうか？結論から言ってしまうと，この構造は IL を最小元，CL を最大限に持つような非可算濃度の完備束となる．以下，$\mathcal{I}$ が完備束構造になることを示し，その完備束の持つ基本的な性質を紹介する．

3.1 中間論理が形成する完備束

この小節では，$\mathcal{I}$ が完備束となることを示す．

補題 3.1. $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq I$ に対し，$\{\alpha \mid \mathbf{HJ} \oplus (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda) \vdash \alpha\}$ は，全ての L_λ たちを包含する最小の中間論理となる．

Proof. 自明． □

定理 3.2. $\mathcal{I}$ が IL を最小元，CL を最大限に持つような順序束である．

Proof. 中間論理の定義から，IL, CL が I の最小元，最大元になることは自明．また，$\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq I$ の上限として $\{\alpha \mid \mathbf{HJ} \oplus (\bigcup L_\lambda) \vdash \alpha\}$，下限としてそれぞれ $\bigcap L_\lambda$ がとれる（補題 1.7，補題 3.1）． □

定義 3.3. 中間論理 L と論理式の集合 $A \subseteq \mathrm{CL}$ に対し，中間論理 $\{\alpha \mid \mathbf{HJ} \oplus (L \cup A) \vdash \alpha\}$ を $L + A$ と書く．また，$L + \{\alpha\}$ を特に $L + \alpha$ と書く．

3.2 $\mathcal{I}$ の性質いろいろ

ここでは，$\mathcal{I}$ の性質をいくつか紹介する．

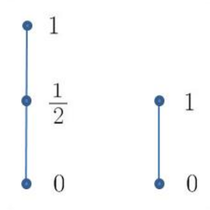

図 1: $\mathcal{H}3$（左），$\mathcal{K}2$（右）

まず，$\mathcal{I}$ には 2 番目に大きな中間論理が存在することを示す：

定理 3.4. 図 1 で与えられる 3 点のハイティング代数 $\mathcal{H}3 = \langle H3 = \{0, 1/2, 1\}, \leq, \triangleright, \sqcap, \sqcup, 0, 1\rangle$ に対し，$L_H(\mathcal{H}3)$ は古典論理の次に大きな中間論理となる．即ち，

- $L_H(\mathcal{H}3) \subsetneq \mathrm{CL}$
- $L \neq \mathrm{CL}$ なる全ての中間論理 L に対し，$L \subseteq L_H(\mathcal{H}3)$

となる．

Proof. まず，$L_H(\mathcal{H}3) \subsetneq \mathrm{CL}$ を言う．$\mathcal{H}3$ 上の付値 $h : \mathrm{P} \to \{0, 1, 2\}$ を $h(p) = 1, h(q) = 0$ となるようにとれば，$(((p \to q) \to p) \to p)^h = 1$ となり，$\mathcal{H}3 \not\models ((p \to q) \to p) \to p$ が言える．従って，$L_H(\mathcal{H}3) \subsetneq \mathrm{CL}$.

次に，任意の $L \neq \mathrm{CL}$ に対し，$L \subseteq L_H(\mathcal{H}3$ であることを示す．定理 2.4 より $L = L_H(\mathbb{A})$ となるハイティング代数のクラス $\mathbb{A}$ が存在する．また，$L \neq \mathrm{CL}$ より，$\mathbb{A}$ の中にはブール代数ではないようなハイティング代数 $\mathcal{A} = \langle A, \leq', \triangleright', \sqcap', \sqcup', 0', 1' \rangle$ が存在する．はじめに，$\mathcal{H}3$ から $\mathcal{A}$ への埋め込み（単射準同型）e が存在することを言う：

$\mathcal{H}3$ の演算表は以下で与えられる．

$\sqcap$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\sqcup$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\triangleright$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1	1
1	0	1/2	1

$a \triangleright_A 0' = 0'$ なる $a \in A \backslash \{0', 1'\}$ があれば，$e(0) = 0', e(1/2) = a, e(1) = 1'$ なる e が埋め込みとなることが簡単に確かめられる（$0', 1'$ がそれぞれ A の最小元・最大元であるから，その他の演算は $\mathcal{H}3$ と同じになる）．従って，このような a の存在を言えばよい．

$\mathcal{A}$ はブール代数でないので，$x \sqcup' (x \triangleright' 0') \neq 1'$ なる $x \in A$ がとれる．$x \sqcup' (x \triangleright' 0') \neq 1'$ より $x \notin \{0', 1'\}$.

$x \triangleright' 0' = 0'$ の時はこの x が上に述べた a の役割を果たす．

$x \triangleright' 0' \neq 0'$ とする．この時，$y = x \sqcup' (x \triangleright' 0')$ が $y \notin \{0', 1'\}$ と $y \triangleright 0' = 0'$ を満たすことを示す．まず，$x, x \triangleright' 0' \neq 0'$ より $y \neq 0'$ が言える．また，x の取り方から $y \neq 1$ は明らか．$y \triangleright' 0' \neq 0$ とすると，y と $x, x \triangleright' 0'$ はそれぞれ比較不能であり，$x \sqcap' (y \triangleright' 0') = 0'$ でなければならないので，$x \triangleright' 0' = \max\{z \mid x \sqcap' z = 0'\}$ に反する．従って，$y \triangleright' 0' = 0'$.

さて，$\varphi \notin L_H(\mathcal{H}3)$ とする．つまり，$\mathcal{H}3$ 上の付値 h で $\varphi^h \neq 1$ となるものがあるとする．この時，$\mathcal{A}$ 上の付値 h' を $h'(p) = e(h(p))$ で与えれば，$\varphi^{h'} = e(\varphi^h) \neq 1'$ となり，$\varphi \notin L_H(\mathcal{A})$ が言える．従って，$L_H(\mathcal{A}) \subseteq L_H(\mathcal{H}3)$. □

また，以下のようにして同じ論理を捉えることが出来る．

定理 3.5. 図 1 で与えられる 2 点クリプキフレーム $\mathcal{K}2$ に対し，$L_K(\mathcal{K}2)$ も 2 番目に大きな中間論理となる．すなわち，$L_K(\mathcal{K}2) = L_H(\mathcal{H}3)$.

Proof. まず，以下の 2 つの補題を用意する．

補題 3.6. $\mathcal{K}2$ を基にしたクリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}2, h \rangle$ が与えられた時，$\mathcal{H}3$

上の付値 h' を

$$h'(p) = \begin{cases} 0 & \text{if } h(p) = \emptyset \\ 1/2 & \text{if } h(p) = \{0\} \\ 1 & \text{if } h(p) = \{0,1\} \end{cases}$$

で定める．この時，任意の論理式 α に対し，

$$\alpha^{h'} = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathcal{M},0 \not\models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M},1 \not\models \alpha \\ 1/2 & \text{if } \mathcal{M},0 \not\models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M},1 \models \alpha \\ 1 & \text{if } \mathcal{M},0 \models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M},1 \models \alpha \end{cases}$$

となる．

補題 3.7. $\mathcal{H}3$ 上の付値 h が与えられた時，$\mathcal{K}2$ を基にしたクリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}2, h' \rangle$ を

$$h'(p) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } h(p) = 0 \\ \{0\} & \text{if } h(p) = 1/2 \\ \{0,1\} & \text{if } h(p) = 1 \end{cases}$$

で定める．この時，任意の論理式 α に対し，

$$\begin{cases} \mathcal{M},0 \not\models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M},1 \not\models \alpha & \text{if } \alpha^h = 0 \\ \mathcal{M},0 \not\models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M},1 \models \alpha & \text{if } \alpha^h = 1/2 \\ \mathcal{M},0 \models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M},1 \models \alpha & \text{if } \alpha^h = 1 \end{cases}$$

これらの補題は α のサイズに関する簡単な帰納法で確かめられる．さて，これらの補題が示すことは，いかの主張である．

- $\mathcal{K}2$ を基にするクリプキモデル $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M} \not\models \alpha$ なるものがあれば，$\mathcal{H}3$ 上の付値 h で $\alpha^h \neq 1$ となるものを作ることが出来る．
- $\mathcal{H}3$ 上の付値 h で $\alpha^h \neq 1$ なるものがあれば，$\mathcal{K}2$ を基にするクリプキモデル $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M} \not\models \alpha$ なるものを作ることが出来る．

従って，$\alpha \notin L_K(\mathcal{K}2)$ と $\alpha \notin L_H(\mathcal{H}3)$ の同値性が言える． □

一方，２番目に小さい中間論理は存在しない：

定理 3.8. 任意の中間論理 $L \supsetneq \mathrm{IL}$ に対し，$\mathrm{IL} \subsetneq J \subsetneq L$ を満たす J が存在する．

Proof. $\mathrm{IL} \supsetneq L$ より，$\varphi \in L \setminus \mathrm{IL}$ を取ってくることが出来る．ここで，p を φ に現れない命題変数とし，$J = \mathrm{IL} + ((p \to \varphi) \to p) \to p$ とする．この J が $\mathrm{IL} \subsetneq J \subsetneq L$ を満たす．以下，そのことを確かめる．

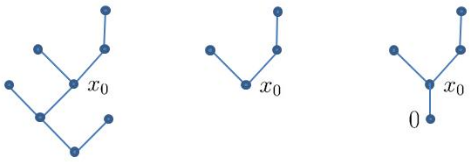

図 2: $\mathcal{G}$（左），$\mathcal{G}'$（中央），$\mathcal{G}''$（右）

1. $J \subsetneq L$

   まず，$\varphi \to ((p \to \varphi) \to p) \to p \in \mathrm{IL} \subseteq L$ が以下の **LJ**-証明図[4] により確かめられる．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{p, \varphi \Rightarrow \varphi}\ (\text{Weakening})}{\varphi \Rightarrow p \to \varphi}\ (\mathrm{R} \to) \qquad p \Rightarrow p}{(p \to \varphi) \to p, \varphi \Rightarrow p}\ (\mathrm{L} \to)}{\varphi \Rightarrow ((p \to \varphi) \to p) \to p}\ (\mathrm{R} \to)}{\Rightarrow \varphi \to ((p \to \varphi) \to p) \to p}\ (\mathrm{R} \to)
$$

   従って，$\varphi \in L$ と合わせて $((p \to \varphi) \to p) \to p \in L$ を得る．故に，$J \subseteq L$.

   次に，$J \neq L$ を示す．$\varphi \notin \mathrm{IL}$ より，$\mathcal{G} \not\models \varphi$ なる有限クリプキフレーム $\mathcal{G} = \langle W, \leq \rangle$ が存在する．S は有限なので，

   $\{w \in W \mid w, \mathcal{M} \not\models \varphi$ なる $\mathcal{G}$ を基にするクリプキモデル $\mathcal{M}$ が存在する$\}$

   には極大元 x_0 が存在する．これを用い，新しいクリプキフレーム $\mathcal{G}' = \langle W', \leq' \rangle$ を，

$$W' = \{w \in W \mid x_0 \leq w\}$$

$$w_1 \leq' w_2 \iff w_1, w_2 \in W' \text{ かつ } w_1 \leq w_2$$

   で与える（図 2）．x_0 の取り方から，$\mathcal{G}'$ は以下のような性質を持つ．

   - $\mathcal{G}'$ を基にするあるクリプキモデル $\mathcal{N}$ があって，$x_0, \mathcal{N} \not\models \varphi$.
   - $x_0 \neq y \in W'$ ならば，$\mathcal{G}'$ を基にするどんなクリプキモデル $\mathcal{M}$ に対しても，$y, \mathcal{M} \models \varphi$.

   さて，この性質から $\mathcal{G}' \models ((p \to \varphi) \to p) \to p$ が言え，$J = \mathrm{IL} + ((p \to \varphi) \to p \to p \subseteq L_K(\mathcal{G}')$ となる．一方，$\mathcal{G}' \not\models \varphi$ より，$L \ni \varphi \notin L_K(\mathcal{G}')$. 従って，$J \neq L$.

[4]直観主義論理の証明システム **LJ** は 0.1 小節で与えられている．

2. $\mathrm{IL} \subsetneq J$

$\mathrm{IL} \subseteq \mathrm{IL} + ((p \to \varphi) \to p) \to p = J$ は明らかなので，$\mathrm{IL} \neq J$ を言えばよい．まず，上で作った $\mathcal{G}'$ を使って新しいクリプキフレーム $\mathcal{G}'' = \langle W'', \leq'' \rangle$ を，

$$W'' = W' \cup \{0\}$$

$$w_1 \leq'' w_2 \iff w_1 \leq' w_2 \text{ または } w_1 = 0$$

で与える（図 2）．ここで，クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}'', h \rangle$ を

$$\mathcal{M}, x_0 \not\models \varphi$$

$$h(p) = W'' \setminus \{0\}$$

を満たすようにとれば，$\mathcal{M}, 0 \not\models ((p \to \varphi) \to p) \to p$．従って，$((p \to \varphi) \to p) \to p \notin \mathrm{IL}$ が言え，$\mathrm{IL} \neq J$ となる．

□

系 3.9. 論理式の可算列 $\psi_1, \psi_2, \dots \in \mathrm{CL}$ で $\mathrm{CL} \supsetneq \mathrm{IL} + \psi_1 \supsetneq \mathrm{IL} + \psi_2 \supsetneq \dots$ となるものが存在する．

Proof. 命題変数の可算列 $q, p_0, p_1, p_2, \dots$ を用意し，$\psi_0 \equiv ((p_0 \to q) \to p_0) \to p_0$，$\psi_{i+1} \equiv ((p_{i+1} \to \psi_i) \to p_{i+1}) \to p_{i+1}$ とすればよい． □

3.3 中間論理の個数

はじめに挙げられた問いの一つ「どれほど多くの中間論理が存在するのか」については， Jankov により一つの答えが与えられた：

定理 3.10. 非可算個の中間論理が存在する．

証明は Jankov [3] により与えられている（らしい）が，ここでは省略する（正直に言うと，証明がワカラナイ...）．

4 古森-鹿島の問題：古典論理と直観主義論理の差

系 3.9 では，中間論理の無限下降列を具体的に与えている．その際用いられた ψ_i は, 古典論理で証明可能な論理式 $((p \to q) \to p) \to p$ に別の論理式を代入することで与えられていた．一般に，古典論理で証明可能な論理式 φ のある代入例 φ' に対し，$\mathrm{IL} + \varphi$ が中間論理となることは明らかである．また，φ' が φ に論理式を代入することで得られる論理式である時，中間論理の性質 ($\star 2$) により，$\mathrm{IL} + \varphi$ が $\mathrm{IL} + \varphi'$ より強い論理になる（真の意味で強

いとは言えないことに注意），つまり，$\mathrm{IL}+\varphi \supseteq \mathrm{IL}+\varphi'$ となることも明らかである．

論理式間の関係 $\sqsubseteq, \sqsubset$ を

$$\alpha \sqsubseteq \beta \ :\Longleftrightarrow\ \beta \text{ は } \alpha \text{ に論理式を代入して得られる}$$

$$\alpha \sqsubset \beta \ :\Longleftrightarrow\ \alpha \sqsubseteq \beta \text{ であり,} \beta \sqsubseteq \alpha \text{ でない}$$

と入れる．上の議論から，より強い中間論理を作りたければ $\sqsubset$ の意味で小さい論理式を IL に加えればよいことがわかる．ここで，以下の疑問が生じる [5]
．

問題 4.1 (古森-鹿島の問題)**.** 論理式 α が $\alpha \in \mathrm{CL}$ かつ

$$\text{全ての } \beta \in \mathrm{CL} \text{ に対し,} \beta \not\sqsubset \alpha$$

を満たす時 α **は古典論理で極小**であると言う．

$\varphi \in \mathrm{CL} \setminus \mathrm{IL}$ が古典論理で極小ならば，$\mathrm{IL}+\varphi = \mathrm{CL}$ となるか？

古典論理の部分論理を古典論理で極小な論理式のみを用いて与えるということは非常に自然なことである．例えば，直観主義論理や BCK 論理などは実際に極小な論理式のみを用いて公理化されている．Jankov によって，古典論理と直観主義論理の間には非常に大きな差があるということがある意味で示されたのであるが，上の問題はそれでも「（ある意味では）直観主義論理は古典論理のすぐ下の論理なのではないか」という問いになっている．中間論理研究のひとつのテーマが古典論理と直観主義論理の差はどれほど大きいのかという点にあるのであれば，上の問題はとても重要な問題である（と私は理解している）．

補足 4.2. この問題は，言語によって回答が違うかもしれない非常に繊細な問題である．例えば，言語に $\neg$ を含むと $\neg(p \vee q) \to (\neg p \vee \neg q)$ という論理式が反例となることがわかる．しかし，この例は $\neg$ の代わりに $\bot$ を用いて書き換えると反例になっていない．

4.1 問題の現状

正直な話，この問題については有効な手法が与えられていない（[4] では，上の問題に対して構文論的な証明方針が提案されているが未だ未解決）．しかし，具体的に与えられた α に対しては,「$\mathrm{IL}+\alpha = \mathrm{CL}$ であるか？」や「α が古典論理で極小であるか？」といった問題が決定可能であることを述べておく．

[5] この問題は [4] により与えられた問題である．[5] により BCK 論理以上の論理を対象にして与えられていた問題の部分問題として与えられている．

補題 4.3. 与えられた α に対し,「$\mathrm{IL}+\alpha=\mathrm{CL}$ であるか？」という問題は決定可能.

Proof. 定理 3.4（と定理 3.5）から，α がトートロジかつ $\mathcal{H}3 \not\models \alpha$（あるいは $\mathcal{K}2 \not\models \alpha$）であることと，$\mathrm{IL}+\alpha=\mathrm{CL}$ であることが同値であることがわかる．α のトートロジ判定はもちろん決定可能．$\mathcal{H}3 \not\models \alpha$ の判定も有限の表で計算できる． □

補題 4.4. 与えられた α に対し,「α が古典論理で極小であるか？」という問題は決定可能.

Proof. α が古典論理で極小でないという状況は，以下の状況である．

> α のある $\underline{\text{部分論理式 } \beta}$ があって，α に現れる $\underline{\text{いくつかの } \beta \text{ の出現}}$ を α に現れない命題変数 q で置き換えたものがトートロジとなる．

従って，極小であるかどうかの判定は,「部分論理式 β」と「いくつかの β の出現」という部分を全てしらみつぶしに動かして確認していくことで判定できる．もちろんこれらの動かし方は有限とおりである． □

0　事前知識

0.1　古典論理と直観主義論理のシーケント計算体系

定義 0.1 (古典論理と直観主義論理のシーケント計算体系)**.** Γ, Δ を論理式の有限集合とした時，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ という表現を**シーケント**と呼ぶ．以下，シーケントの上では $\Gamma \cup \Delta$ を Γ, Δ と書き，$\{\alpha\}$ を単に α と書く．また，空集合 $\emptyset$ は省略して書かないこともある．従って，例えば，$\emptyset \Rightarrow \Gamma \cup \{\alpha\}$ というシーケントを $\Rightarrow \Gamma, \alpha$ と書く．

古典論理のシーケント計算体系 **LK** は，$\alpha \Rightarrow \alpha$ および $\bot \Rightarrow \alpha$ という形のシーケントを公理として持ち，以下の推論規則を持ったシステムである．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{Cut}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma', \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ (\mathrm{Weakening})$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \to \beta}\ (\mathrm{R} \to) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \to \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L} \to)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}\ (\mathrm{R}\vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}\ (\mathrm{R}\vee)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}\ (\mathrm{R}\wedge)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\wedge) \quad \frac{\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\wedge)$$

直観主義論理のシーケント計算体系 **LJ** は **LK** と同様の公理と推論規則を持ったシステムであるが,「扱うシーケントの右辺が常に空か単元集合となっている」という制限が付く．

シーケント計算の体系 S で，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明できる時，$S \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く．また，$S \vdash \emptyset \Rightarrow \alpha$ を $S \vdash \alpha$ と書く．

0.2　古典論理の二値意味論

定義 0.2. h が各命題変数に対して **true** または **false** を割り当てる関数である時，h を真理値関数と呼ぶ．

真理値関数 h が与えられた時，以下の規則に従って，h を任意の論理式に対して **true** または **false** を割り当てる関数に拡張する．

1. $h(\bot) = \mathbf{false}$
2. $h(\alpha \to \beta) = \mathbf{true}$ if $h(\alpha) = \mathbf{false}$ or $h(\beta) = \mathbf{true}$
3. $h(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{true}$ if $h(\alpha) = \mathbf{true}$ and $h(\beta) = \mathbf{true}$
4. $h(\alpha \vee \beta) = \mathbf{true}$ if $h(\alpha) = \mathbf{true}$ or $h(\beta) = \mathbf{true}$

任意の真理値関数 h に対して $h(\alpha) = \mathbf{true}$ となる α は**トートロジ**と呼ばれる．

定理 0.3 (古典論理の完全性)**.** φ がトートロジであることと $\mathbf{HK} \vdash \varphi$ であることは同値．

0.3　クリプキ意味論

定義 0.4 (クリプキモデル)**.** 最小元を持った半順序集合 $\langle W, \leq \rangle$ を**クリプキフレーム**と呼ぶ．W の元は**可能世界**と呼ばれる．

クリプキフレーム $\mathcal{F} = \langle W, \leq \rangle$ に対し，組 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, h \rangle$ が（$\mathcal{F}$ を基にした）**クリプキモデル**であるとは，h が P から 2^W への関数であり，

$$\forall p \in \mathrm{P},\ w \leq v \text{ かつ } w \in h(p) \implies v \in h(p)$$

という性質（**遺伝性**）を満たす時である．このような h は付値と呼ばれる．
クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \langle W, \leq \rangle, h \rangle$ が与えられたとき,「可能世界 w で α が正しい」という関係 $w, \mathcal{M} \models \alpha$ を以下のように帰納的に与える．

1. $\mathcal{M}, w \models p \iff w \models p$
2. $\mathcal{M}, w \models \perp$ とはならない
3. $\mathcal{M}, w \models \alpha \to \beta \iff$ 任意の $v \geq w$ に対し,$\mathcal{M}, v \models \alpha$ ならば $\mathcal{M}, v \models \beta$
4. $\mathcal{M}, w \models \alpha \wedge \beta \iff \mathcal{M}, w \models \alpha$ かつ $\mathcal{M}, w \models \beta$
5. $\mathcal{M}, w \models \alpha \vee \beta \iff \mathcal{M}, w \models \alpha$ または $\mathcal{M}, w \models \beta$

クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \langle W, \leq \rangle, \models \rangle$ に対し，任意の $w \in W$ に対し $\mathcal{M}, w \models \alpha$ となる時，論理式 α は $\mathcal{M}$ で恒真であると言い，$\mathcal{M} \models \alpha$ と書く．クリプキフレーム $\mathcal{F} = \langle W, \leq \rangle$ に対し，$\mathcal{F}$ を基にする任意のクリプキモデル $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M} \models \alpha$ となる時，α は $\mathcal{F}$ で恒真であると言い，$\mathcal{F} \models \alpha$ と書く．

定理 0.5 (直観主義論理のクリプキ完全性)**.** 以下の条件は同値．

- $\mathbf{HJ} \vdash \alpha$.
- 任意のクリプキフレーム $\mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{F} \models \alpha$.
- 任意の有限クリプキフレーム（可能世界が有限個しかないフレーム)$\mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{F} \models \alpha$.

また，以下の定理は定理 0.3 から明らかである．

定理 0.6. 以下の 2 条件は同値．

- $\mathbf{HK} \vdash \alpha$.
- $\langle \{a\}, =, a \rangle \models \alpha$.

0.4 ブール代数とハイティング代数

定義 0.7 (ブール代数・ハイティング代数)**.** 構造 $\langle M, \leq \rangle$ が束であるとは，以下を満たす時である．

- $\leq$ が M 上の半順序である．
- 任意の $\{a, b\} \subseteq M$ が（$\leq$ に関する）上限 $a \sqcup b$ を持つ．
- 任意の $\{a, b\} \subseteq M$ が（$\leq$ に関する）下限 $a \sqcap b$ を持つ．

また，構造 $\langle M, \leq \rangle$ が完備束であるとは，

- $\leq$ が M 上の半順序である．
- 任意の $S \subseteq M$ が上限 $\sqcup S$ を持つ．
- 任意の $S \subseteq M$ が下限 $\sqcap S$ を持つ．

を満たす時である．

束 $\langle M, \leq \rangle$ に対し，

- M が（$\leq$ に関する）最大元 t と最小元 b を持ち，$t \neq b$ を満たす．
- 任意の $a, b \in M$ に対し，$a \triangleright b = \max\{x \in M \mid\}$ が存在する．

という条件が成立する時，構造 $\langle M, \leq, \sqcap, \sqcup, \triangleright, 0, 1 \rangle$ はハイティング代数である（あるいは単に $\langle M, \leq \rangle$ はハイティング代数である）と言う．また，さらに，

- 任意の $a \in M$ に対し，$(a \triangleright 0) \sqcup a = 1$.

という条件が成り立つ時，構造 $\langle M, \leq, \sqcap, \sqcup, \triangleright, 0, 1 \rangle$ はブール代数と呼ばれる．

ハイティング代数 $\mathcal{A} = \langle M, \leq, \sqcap, \sqcup, \triangleright, 0, 1 \rangle$ と関数 $h : \mathrm{P} \to M$（付値と呼ばれる）が与えられた時，論理式 α に対し $\alpha^h \in M$ を以下のように定める．

1. $p^h = h(p)$
2. $\perp^h = 0$
3. $(\alpha \to \beta)^h = \alpha^h \triangleright \beta^h$
4. $(\alpha \wedge \beta)^h = \alpha^h \sqcap \beta^h$
5. $(\alpha \vee \beta)^h = \alpha^h \sqcup \beta^h$

全ての $h : \mathrm{P} \to M$ に対し $\alpha^h = 1$ となる時，α は $\mathcal{A}$ で恒真であると言い，$\mathcal{A} \models \alpha$ と書く．

定理 0.8 (古典論理とブール代数)**.** 以下の条件は同値．

- $\mathbf{HK} \vdash \alpha$.
- 任意のブール代数 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A} \models \alpha$.
- ２値のブール代数 $\mathcal{TF}$ に対し，$\mathcal{TF} \models \alpha$.

定理 0.9 (直観主義論理とハイティング代数)**.** 以下の条件は同値.

- $\mathbf{HJ} \vdash \alpha$.
- 任意のハイティング代数 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A} \models \alpha$.
- 任意の有限ハイティング代数 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A} \models \alpha$.