直観主義論理のクリプキ意味論の完全性の構文論的な証明について

千葉大学大学院　理学研究科　数学情報数理学コース　山田恵佑

2008 年 11 月 6 日

この文章では、直観主義論理のクリプキ意味論の完全性の構文論的な証明について扱います。もともとその証明は本橋信義先生の論文[1]に書かれています。その論文に書かれている証明は非常にわかりづらいものとのことですが、その論文の解読を上江洲忠弘先生がされています。もっとわかりやすい証明を与えることがこの文章での目的ですが、ここに書かれているアイデアの大半は古森雄一先生によるものです。

1　準備

直観主義命題論理と、古典述語論理を考える。

直観主義命題論理では、論理記号を $\{\supset\}$ に制限し、命題変数として、$\{p$、q、$r\cdots\}$ が存在するものとする。

古典述語論理では、論理記号として、$\{\supset$、$\forall$、$\perp\}$ を導入し、述語記号として、2 変数述語記号 $\{\leq\}$ があり、さらに、直観主義命題論理の命題変数 $\{p$、q、$r\cdots\}$ に対応した 1 変数述語 $\{p(x)$、$q(x)$、$r(x)\cdots\}$ が存在するものとする。

ここで、直観主義命題論理の論理式 α が与えられたとき、古典述語論理の論理式 $x\models\alpha$ を以下のように定義する。

定義 1($x\models\alpha$ の定義)

1. $\alpha\ \equiv\ p$（命題変数）のとき　$x\models\alpha\ \equiv\ p(x)$
2. $\alpha\ \equiv\ \beta\supset\gamma$ のとき　$x\models\alpha\equiv\forall y(x\leq y\supset y\models\beta\supset y\models\gamma)$

例えば、$\alpha\ \equiv\ p\supset q\supset p$ のとき、

$$x\models\alpha\ \equiv\ \forall y(x\leq y\supset p(y)\supset\forall z(y\leq z\supset q(z)\supset p(z))$$

となる。

[1] A faithful interpretation of intuitionistic predicate logic in classical predicate logic, Comment. Math. Univ. St. Pauli, XXI-2, 11-23, 1972

次に、論理式の列 Γ を、

$$\Gamma \equiv \forall x \forall y \forall z(x \leq y \supset y \leq z \supset x \leq z)、\forall x(x \leq x)、$$
$$\forall x \forall y(x \leq y \supset p(x) \supset p(y))、\forall x \forall y(x \leq y \supset q(x) \supset q(y))、\forall x \forall y(x \leq y \supset r(x) \supset r(y)) \cdots$$

と定義する。

また、直観主義命題論理は LJ、古典述語論理は LK で考える。LK の定義は以下のようなものとする。

定義 2(古典述語論理 LK の定義)

公理

$$\begin{array}{cccc} (I) & \alpha & \rightarrow & \alpha \\ (N) & \bot & \rightarrow & \alpha \end{array}$$

推論規則

$$\frac{\Sigma \rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Lambda \rightarrow \Theta}{\alpha \supset \beta, \Sigma, \Lambda \rightarrow \Delta, \Theta} (\supset\rightarrow) \qquad \frac{\alpha, \Sigma \rightarrow \Delta, \beta}{\Sigma \rightarrow \Delta, \alpha \supset \beta} (\rightarrow\supset)$$

$$\frac{[y/x]\alpha, \Sigma \rightarrow \Delta}{\forall x\alpha, \Sigma \rightarrow \Delta} (\forall \rightarrow) \qquad \frac{\Sigma \rightarrow \Delta, \alpha}{\Sigma \rightarrow \Delta, \forall x\alpha} (\rightarrow \forall)$$

$$\frac{\Sigma \rightarrow \Delta}{\alpha, \Sigma \rightarrow \Delta} (w \rightarrow) \qquad \frac{\Sigma \rightarrow \Delta}{\Sigma \rightarrow \Delta, \alpha} (\rightarrow w)$$

ただし、規則 $(\rightarrow \forall)$ では、下式に x は free に現れないものとする。

この体系では論理式の列を集合として解釈する。例えば、$\alpha, \beta, \alpha \rightarrow \beta, \beta$ という sequent は、$\alpha, \beta \rightarrow \beta$ に等しいと解釈する。そのため、この体系では推論規則に exchange や contruction は存在しない。

2 目標

最終的な目標は以下を示すことである。

定理 1 LJ および、LK について以下が成立する。

$$\vdash_{LJ} \rightarrow \alpha \ \Leftrightarrow \ \vdash_{LK} \Gamma \rightarrow x \models \alpha$$

$\Rightarrow$ が成立するのは、$\rightarrow \alpha$ を示す証明図の長さに関する帰納法で容易に示せるので、$\Leftarrow$ が問題となる。

Γ に含まれる論理式 $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \supset y \leq z \supset x \leq z)$、$\forall x(x \leq x)$ は順序（擬順序）を表現する論理式であり、$\forall x \forall y(x \leq y \supset p(x) \supset p(y))$、$\forall x \forall y(x \leq y \supset q(x) \supset q(y))$

$\cdots$ は、遺伝性を表現する論理式と考えることができるので、$\Gamma \rightarrow x \models \alpha$ という sequent は、直観主義論理のクリプキモデルで valid となることを表現する sequent と考えることができる。

つまり、上の予想は、直観主義論理で論理式 α が証明できることと、古典論理で「クリプキモデルで valid となることを表現する sequent」が証明できることが同値であることを意味している。

$\Leftarrow$ の証明を考えるが、その前に論理体系 LJ^* および、LK^- を定義する。

3　LJ^* および LK^- について

論理体系 LJ^* は、LK の推論規則のうち、$(\rightarrow\supset)$ と $(\rightarrow\forall)$ を以下のように変えた体系である（この場合の LJ^* は述語論理）

$$\frac{\alpha, \Sigma \rightarrow \beta}{\Sigma \rightarrow \alpha \supset \beta}\ (\rightarrow\supset) \qquad \frac{\Sigma \rightarrow \alpha}{\Sigma \rightarrow \forall x\alpha}\ (\rightarrow\forall)$$

他の規則は LK と同じなので、$\rightarrow$ の右辺に、複数の論理式が存在してもよい。そのため、LJ では証明できないが、LJ^* では証明できる sequent が存在する。しかし、LJ で証明できる論理式の集合と、LJ^* で証明できる論理式の集合は等しくなることが知られている。つまり、次の定理が成立する。

定理 2　LJ と LJ^* において、以下が成立する（LJ が命題論理なら LJ^* も命題論理。LJ が j 述語論理なら LJ^* も述語論理で）。

$$\vdash_{LJ} \rightarrow \alpha \ \Leftrightarrow\ \vdash_{LJ^*} \rightarrow \alpha$$

次に、論理体系 LK^- を定義する。LK^- の公理は LK と同様であり、推論規則は以下のようなものである。

推論規則

$$\frac{\Sigma \rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Sigma \rightarrow \Delta}{\alpha \supset \beta, \Sigma \rightarrow \Delta}\ (\supset\rightarrow) \qquad \frac{\alpha, \Sigma \rightarrow \Theta, \beta}{\Sigma \rightarrow \Theta, \alpha \supset \beta}\ (\rightarrow\supset)$$

$$\frac{[y/x]\alpha, \Sigma \rightarrow \Delta}{\forall x\alpha, \Sigma \rightarrow \Delta}\ (\forall\rightarrow) \qquad \frac{\Sigma \rightarrow \Theta, \alpha}{\Sigma \rightarrow \Theta, \forall x\alpha}\ (\rightarrow\forall)$$

$$\frac{\Sigma \rightarrow \Theta}{\alpha, \Sigma \rightarrow \Theta}\ (w\rightarrow) \qquad \frac{\Sigma \rightarrow \Theta}{\Sigma \rightarrow \Theta, \alpha}\ (\rightarrow w)$$

ただし、規則 $(\supset\rightarrow)$ および $(\forall\rightarrow)$ については、Δ が空であるか、atomic な論理式の列である時に規則を適用できるものとする。また、規則 $(\rightarrow\forall)$ では、下式に x は free に現れないものとする。

このように定義した LK^- は、LK と同等の強さを持つ体系になる。つまり、以下の定理が成立する。

定理 3　LK と LK^- において、以下が成立する。

$$\vdash_{LK} \Sigma \rightarrow \Theta \;\Leftrightarrow\; \vdash_{LK^-} \Sigma \rightarrow \Theta$$

4　定理 1 の証明の方針

この LJ^* と、LK^- を利用して、定理 1 を示す。まず、次の定理が成立する。

定理 4　LJ と LJ^* について以下が成立する。

$$\vdash_{LJ} \rightarrow \alpha \;\Leftrightarrow\; \vdash_{LJ^*} \Gamma \rightarrow x \models \alpha$$

さらに、次の予想を示せば定理 1 が証明できる。

予想 1　LJ^* と LK^- について以下が成立する。

$$\vdash_{LJ^*} \Gamma \rightarrow x \models \alpha \;\Leftrightarrow\; \vdash_{LK^-} \Gamma \rightarrow x \models \alpha$$

この予想を示すために admissible sequent という概念を定義する。LK^- における $\Gamma \rightarrow x \models \alpha$ の形の sequent の証明図を考える。この証明図に現れうる sequent のことを admissible sequent と呼ぶことにする（厳密な定義はここでは省略)。予想 1 を拡張した以下の予想を示すことを考える。

予想 2　$\Sigma \rightarrow \Delta$ が admissible sequent のとき LJ^* と LK^- について以下が成立する。

$$\vdash_{LJ^*} \Sigma \rightarrow \Delta \;\Leftrightarrow\; \vdash_{LK^-} \Sigma \rightarrow \Delta$$

$\Gamma \rightarrow x \models \alpha$ の形の sequent は、当然 admissible sequent であるので、予想 2 は、予想 1 よりも強い予想である。LJ^* で証明できる sequent は LK でも証明可能であり、定理 3 より LK と LK^- の証明能力は等しいので、予想 2 において、$\Rightarrow$ は明らかである。$\Leftarrow$ の証明は、$\Sigma \rightarrow \Delta$ を示す LK^- の証明図の長さに関する帰納法で行うが、最後に使われた規則が $(\rightarrow\supset)$ の時と、$(\rightarrow\forall)$ の時が問題となる。

例えば、最後の規則が $(\supset\rightarrow)$ の時は、

$$\frac{\Lambda \rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Lambda \rightarrow \Delta}{\alpha \supset \beta, \Lambda \rightarrow \Delta}\ (\supset\rightarrow)$$

より、帰納法の仮定から$\vdash_{LJ^*} \Lambda \to \Delta, \alpha$ かつ、$\vdash_{LJ^*} \beta, \Lambda \to \Delta$ となる。上の規則は LJ^* でも正しい規則なので $\alpha \supset \beta, \Lambda \to \Delta$ は、LJ^* で証明可能となる。

しかし、最後の規則が (→⊃) の時は、

$$\frac{\alpha, \Sigma \to \Theta, \beta}{\Sigma \to \Theta, \alpha \supset \beta}\ (\to\supset)$$

より、帰納法の仮定から$\vdash_{LJ^*} \alpha, \Sigma \to \Theta, \beta$ であるが、このままでは LJ^* の規則 (→⊃) を適用することはできない。LJ^* では、規則 (→⊃) は → の右辺は β のみでなければならないからである。よって、$\vdash_{LJ^*} \alpha, \Sigma \to \beta$ を示すことができればよいが、そのためには、$\Gamma \to x \models \alpha$ の形の sequent を示す証明図に関する性質や、admissible sequent の性質等を考察する必要がある。

最後に、admissiblesequent の持つ性質を一つ挙げておく。

定理 5 $\Sigma \to \Delta$ が admissible sequent ならば、論理式の列 Δ に含まれる atomic でない論理式の数は高々一つ。

$\Sigma \to \Delta$ の Δ に、atomic でない論理式が二つ以上含まれていた場合、この sequent には、推論規則 (⊃→) を適用することは出来ない。また、LK^- では、→ の右辺の論理式の個数が減る規則は (⊃→) の一つだけである（Cut は存在しない) ので、右辺の論理式の数を減らすことはできない。一方、$\Gamma \to x \models \alpha$ という sequent は、→ の右辺の論理式は $x \models \alpha$ の一つだけである。admissible sequent は、$\Gamma \to x \models \alpha$ という形の sequent の LK^- での証明図に現れうる sequent なので、右辺に atomic でない論理式が二つ以上含まれるときには、admissible sequent ではない。